4 Signalverarbeitung

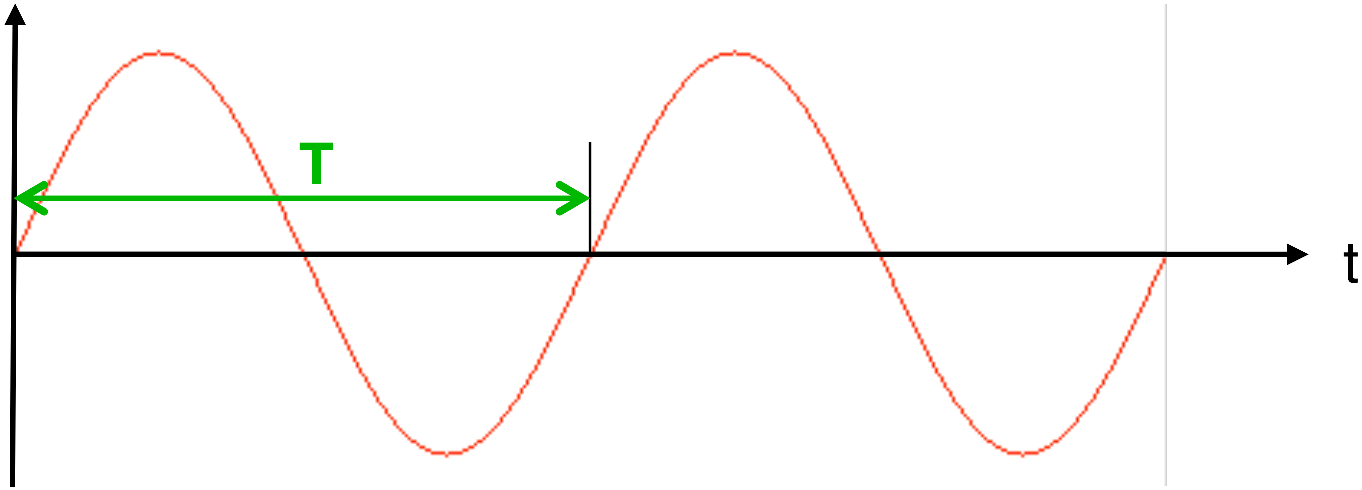
Weiterführende Literatur (z.B.):

Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Richard C. Lyons: Understanding Digital Signal Processing, 2nd ed., Prentice-Hall 2004

Frequenz und Periode

- Viele zeitveränderliche Signale sind *periodisch* oder enthalten periodische Anteile
- Periodisch: Signalverlauf wiederholt sich regelmäßig
- *Periodenlänge T*: Dauer (in s bei zeitabhängigen Signalen) bis zum Beginn der nächsten Wiederholung
- *Frequenz f:* Anzahl der Wiederholungen pro Sekunde (Hz)

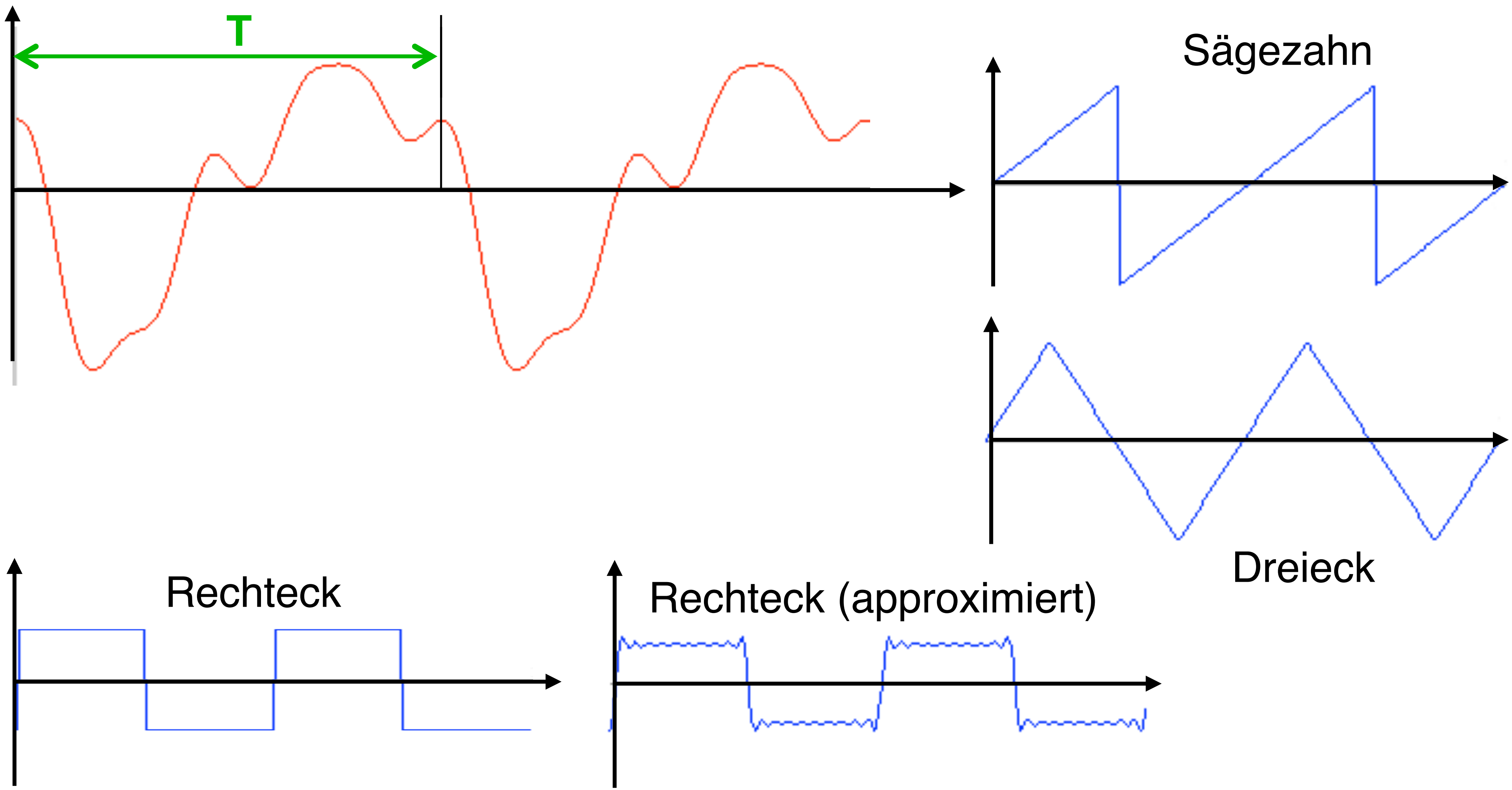


Sinus-Signal

$$T = \frac{1}{f}$$

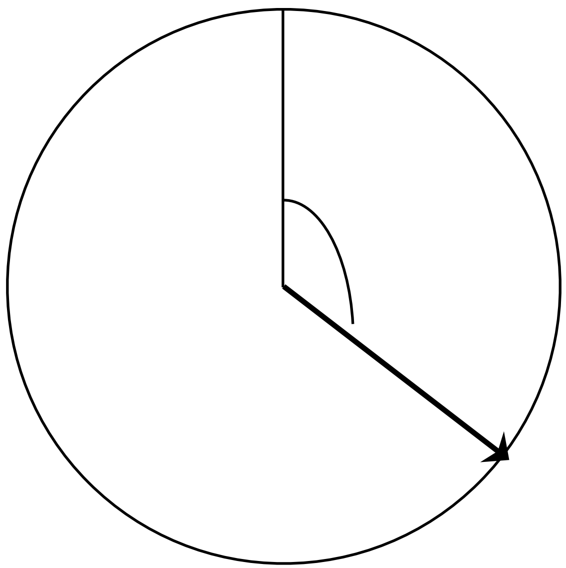
1 Hz = 1/s

Beispiele periodischer Signale



Gradmaß und Bogenmaß

- Die Größe eines Winkels kann in Grad oder als Teil des Umfangs eines Einheitskreises (2π) angegeben werden.



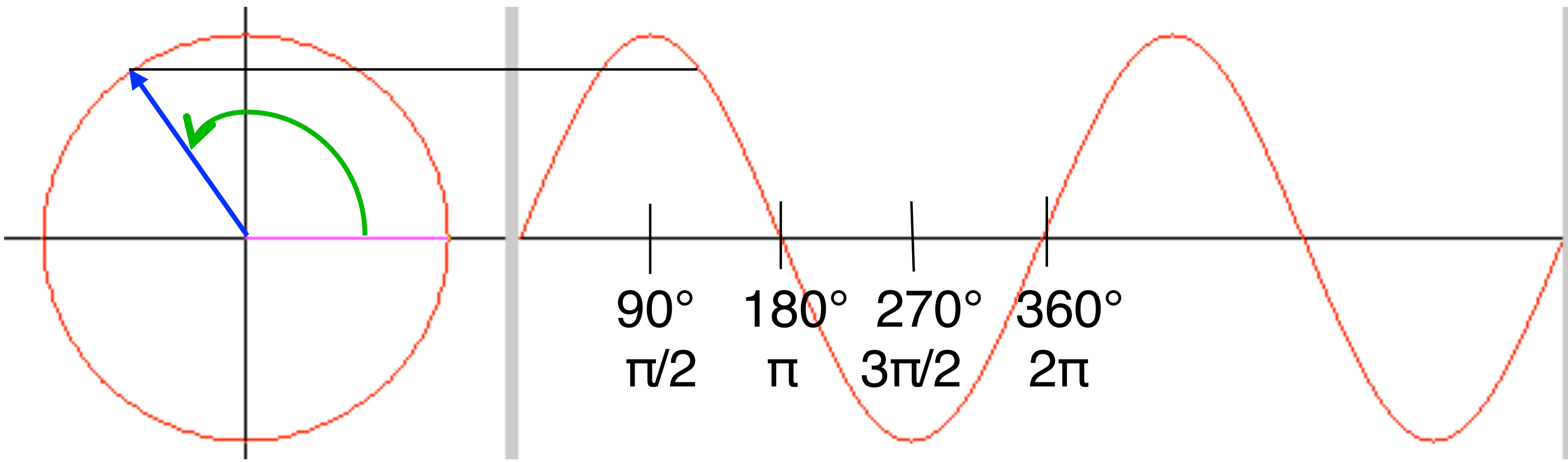
Gradmaß	Bogenmaß
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3/2 \cdot \pi$
360°	$2 \cdot \pi$

Kreisfrequenz

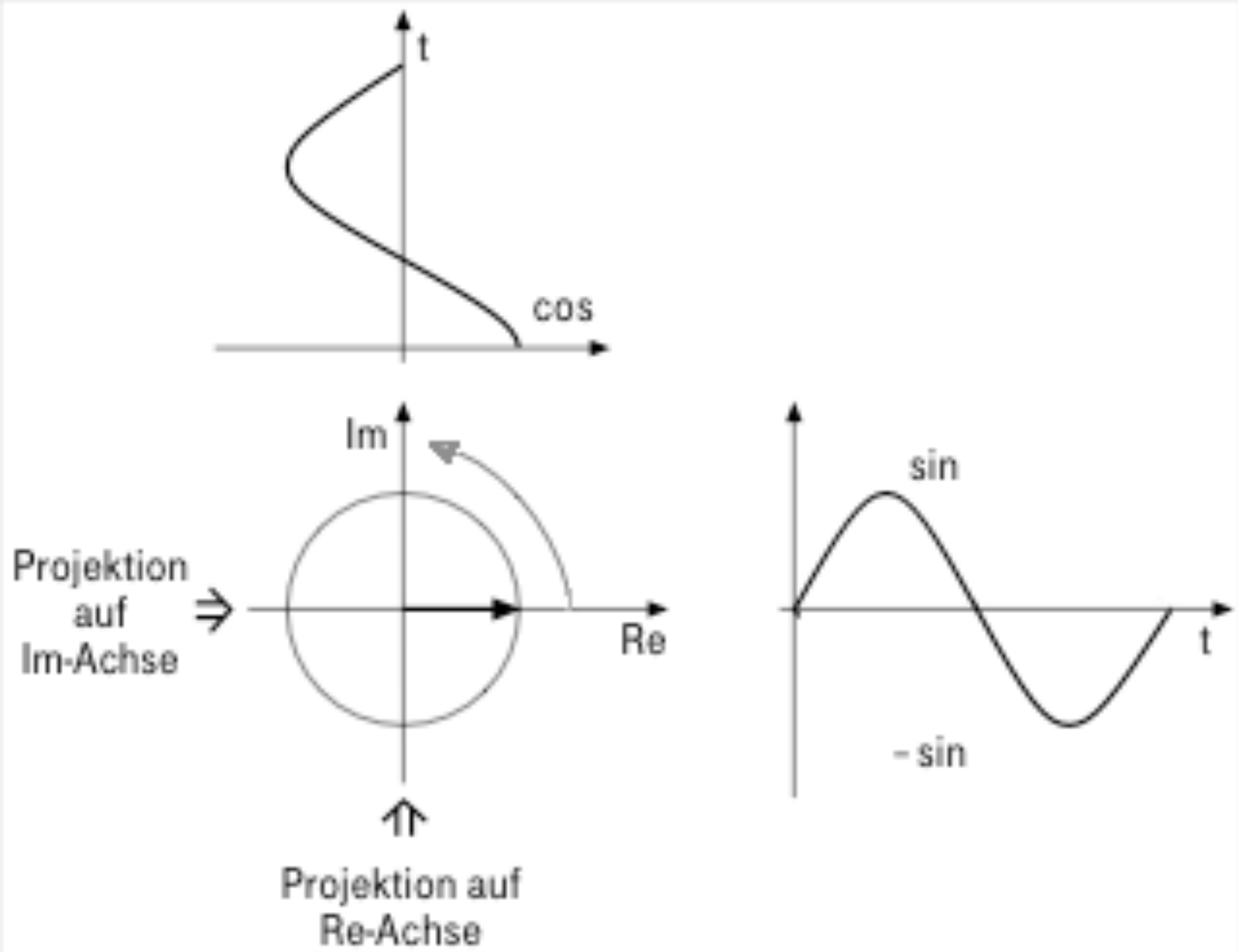
- Die Kreisfrequenz ω gibt den pro Sekunde von einem drehenden Zeiger überstrichenen Winkel im Bogenmaß an (rad/s).

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Beispiel: Zeigerdarstellung (Phasor) einer Sinusschwingung:



Schwingungen und komplexe Zahlen



Eulersche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Gleichwertige Darstellungen einer (Co-)Sinus-Schwingung:

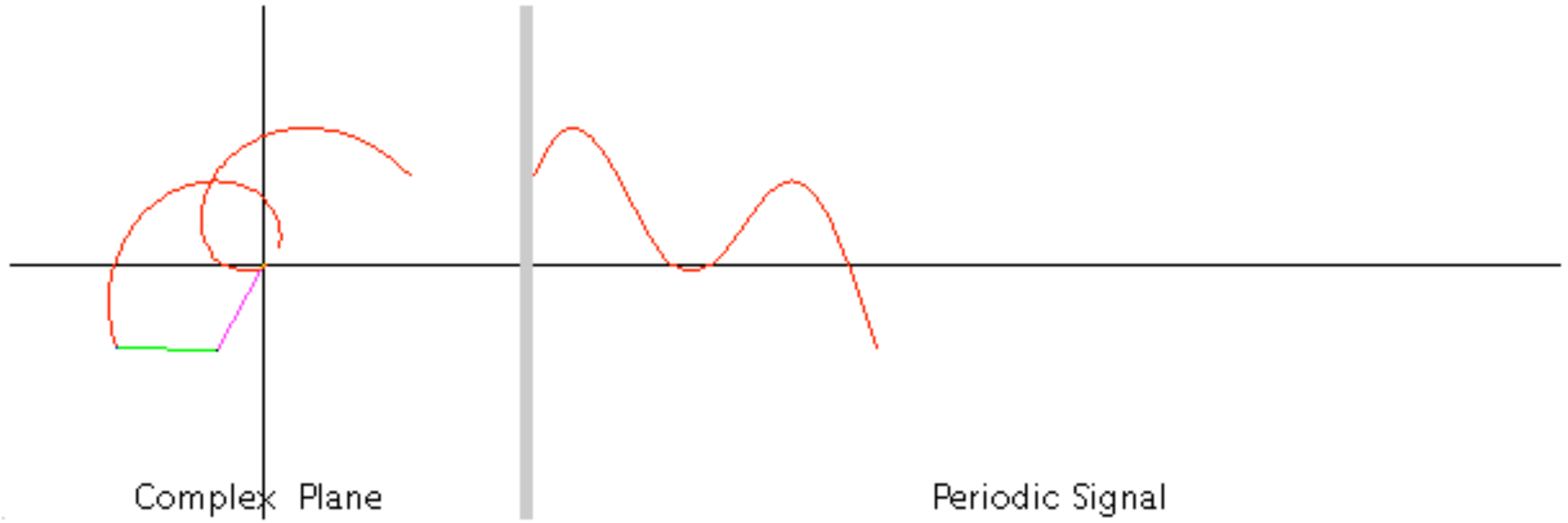
$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(a \cdot e^{i\omega t + \theta}\right)$$

a Amplitude
ω Frequenz
θ Phasenverschiebung

Summieren von Schwingungen

- Die Summation zweier periodischer Schwingungen ergibt wieder eine periodische Schwingung.
- Beispiel:
  - Überlagerung von Sinus/Cosinusfunktionen
  - "Phasor"-Darstellung (d.h. drehende Zeiger)
  - Summation =
    Anfang/Drehpunkt zweiter Drehzeiger am Ende des ersten Zeigers

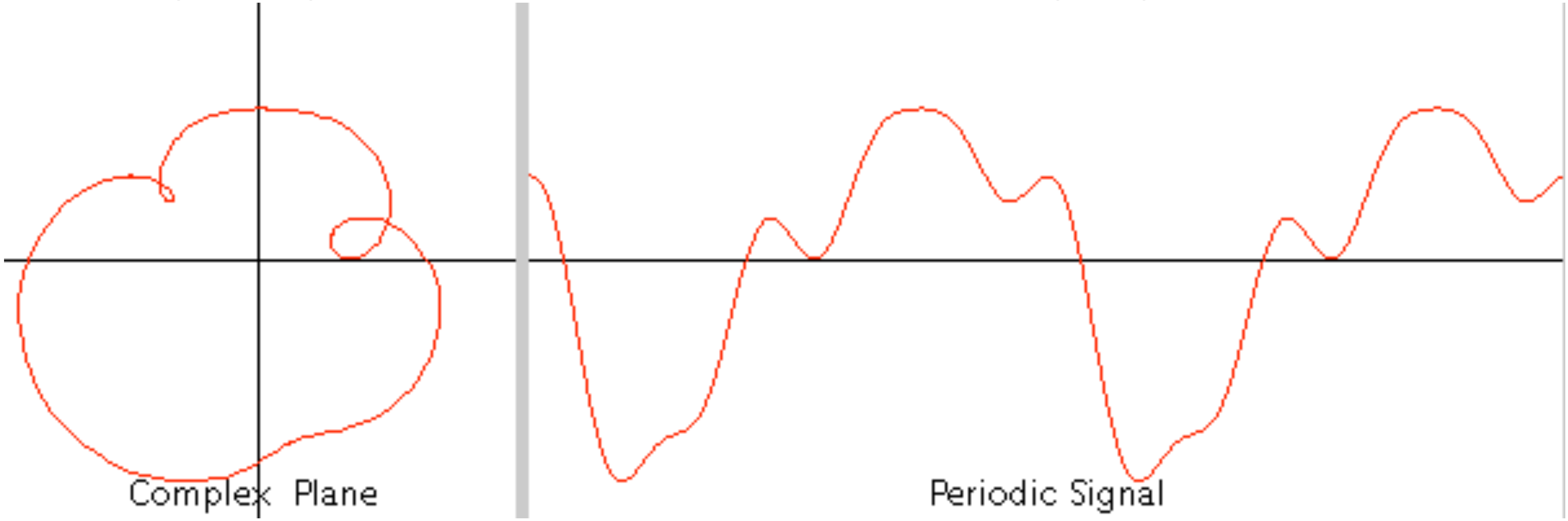


Siehe: http://www.jhu.edu/~signals/phasorlecture2/indexphasorlect2.htm

Summe harmonischer Schwingungen

- Eine Menge von Schwingungen heißt *harmonisch*, wenn die Frequenzen der beteiligten Schwingungen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind.
  - Beispiel: $x_1(t) = 4 \cos(3t)$, $x_2(t) = 2 \cos(6t + \pi/4)$

Überlagerung von fünf harmonischen Schwingungen:



4 Signalverarbeitung

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

Fourier-Reihen

- *Jede* periodische Schwingung kann durch eine Summe harmonischer Cosinus-Schwingungen angenähert werden.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$a_0 \cdot \cos(\theta_0)$	Gleichanteil
$a_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_1)$	Grundfrequenz
$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad k \geq 2$	*k*-te harmonische Schwingung

- *Jede* periodische Schwingung kann durch eine (endliche) Summe von Cosinus-Schwingungen angenähert werden.
  - Die "richtigen" Koeffizienten a_k lassen sich mathematisch bestimmen.
  - Die Genauigkeit der Approximation hängt davon ab, wann die Summe abgebrochen wird.

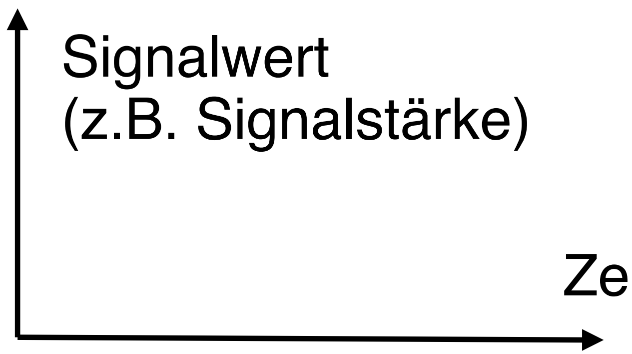
Fourier-Transformation

- Fourierreihen-Approximation funktioniert für periodische Funktionen
  – mit bestimmten (in der Praxis meist erfüllten) Eigenschaften
- Übertragung auf nicht-periodische Funktionen
  – Auswahl eines Teilabschnitts (in der Zeit)
  – Periodische "Fortsetzung" des Teilabschnitts
- Fourier-Transformation
  – Übersetzt eine Funktion in den "Frequenzraum" (Spektrum)
  – Algorithmisch relativ einfach, z.B. als "Fast Fourier Transformation" (FFT) in Hard- oder Software realisiert
  – Transformation umkehrbar

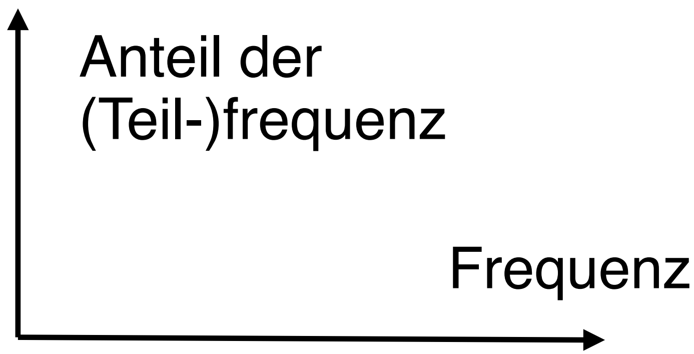
Frequenzspektrum

- Jedes Signal setzt sich aus einer Überlagerung verschiedener (Co)sinusschwingungen zusammen.
- Statt über das Signal zu reden, können wir auch über die Frequenzzusammensetzung des Signals reden (das *Frequenzspektrum*).
- Eine Funktion im *Frequenzraum* gibt an, welchen Anteil eine bestimmte Frequenz am Signal hat.

Werteraum



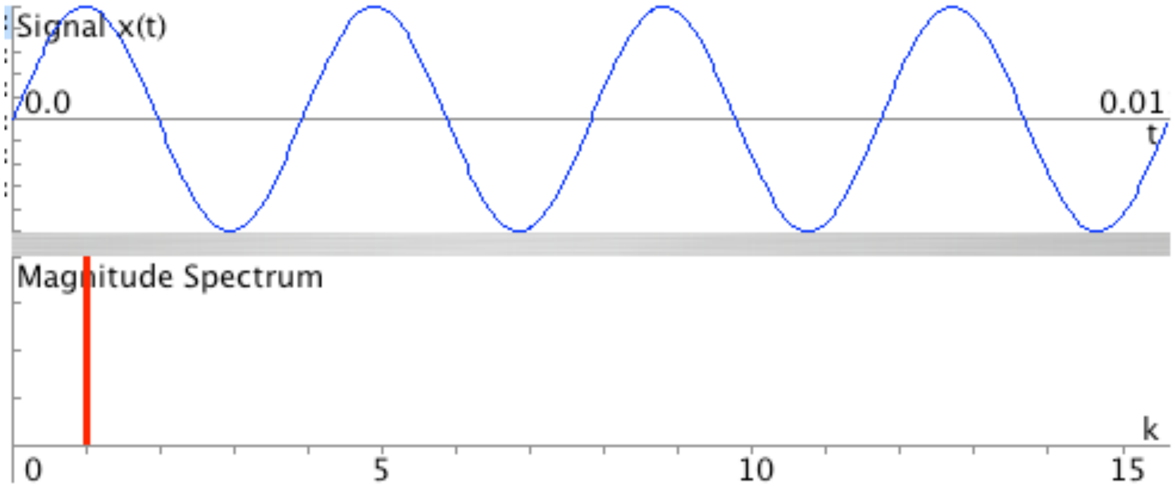
Frequenzraum



Hinweis: Ebenso einsetzbar bei ortsabhängigen statt zeitabhängigen Signalen!

Beispiel: Frequenzspektrums eines Klangs

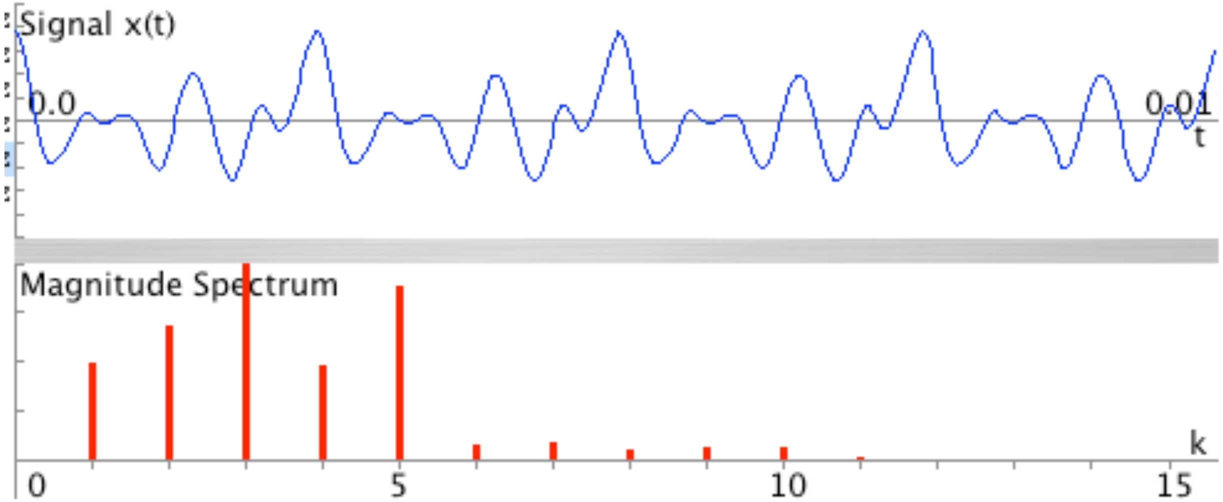
Sinusschwingung (349 Hz):



Werteraum

Frequenzraum

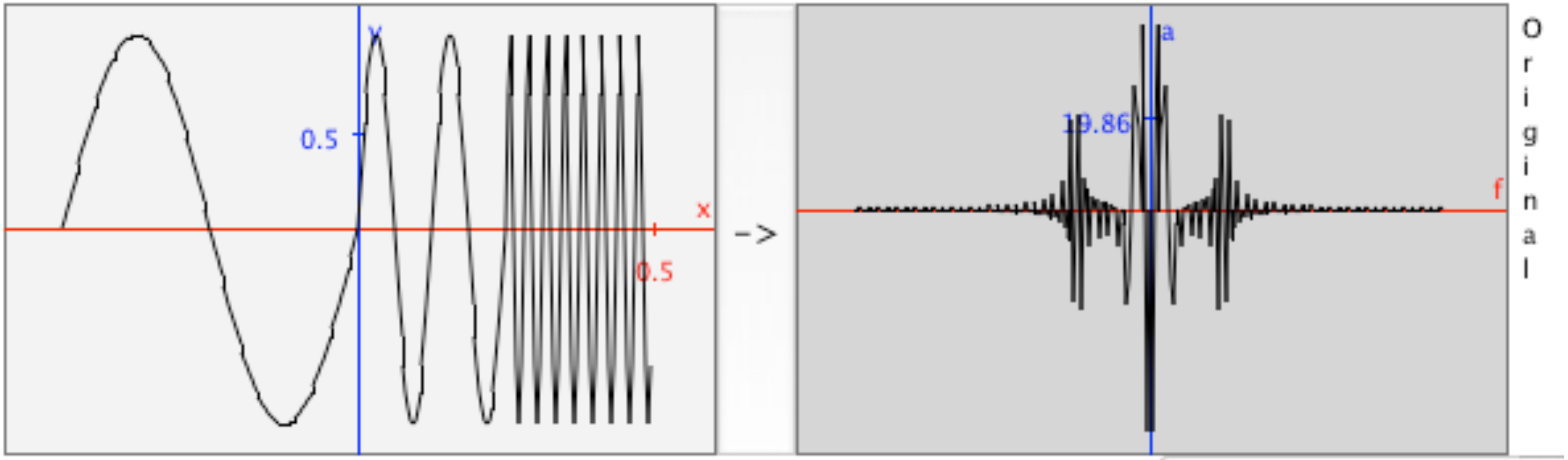
Oboenton (349 Hz):

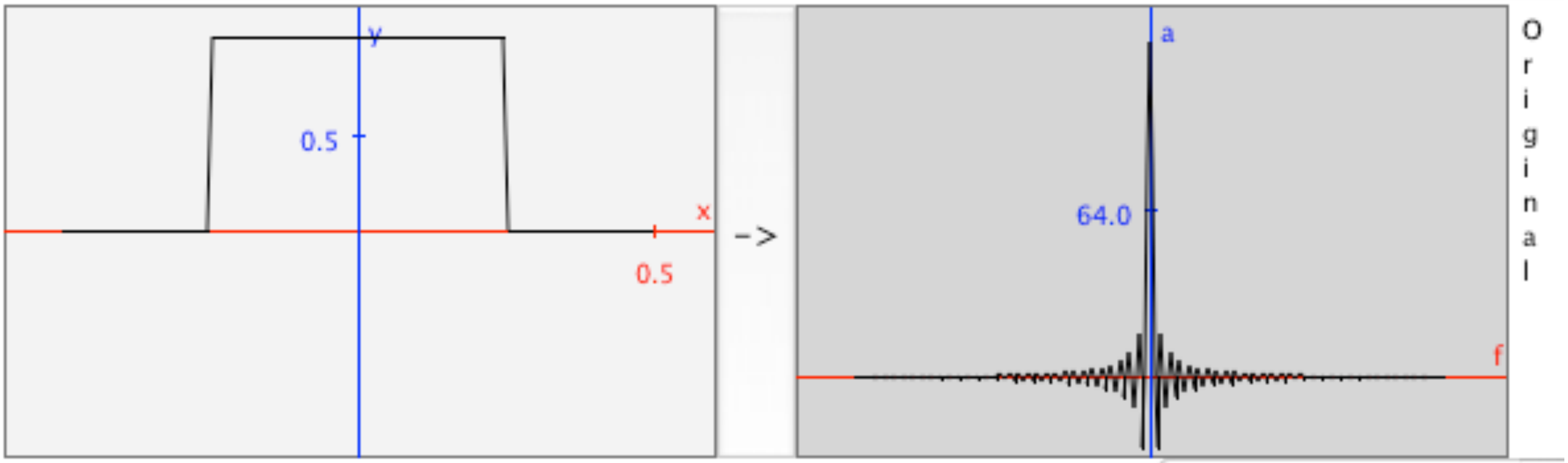


Werteraum

Frequenzraum

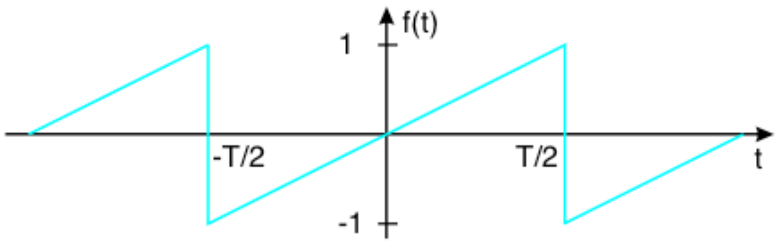
Frquenzspektrum: Beispiele

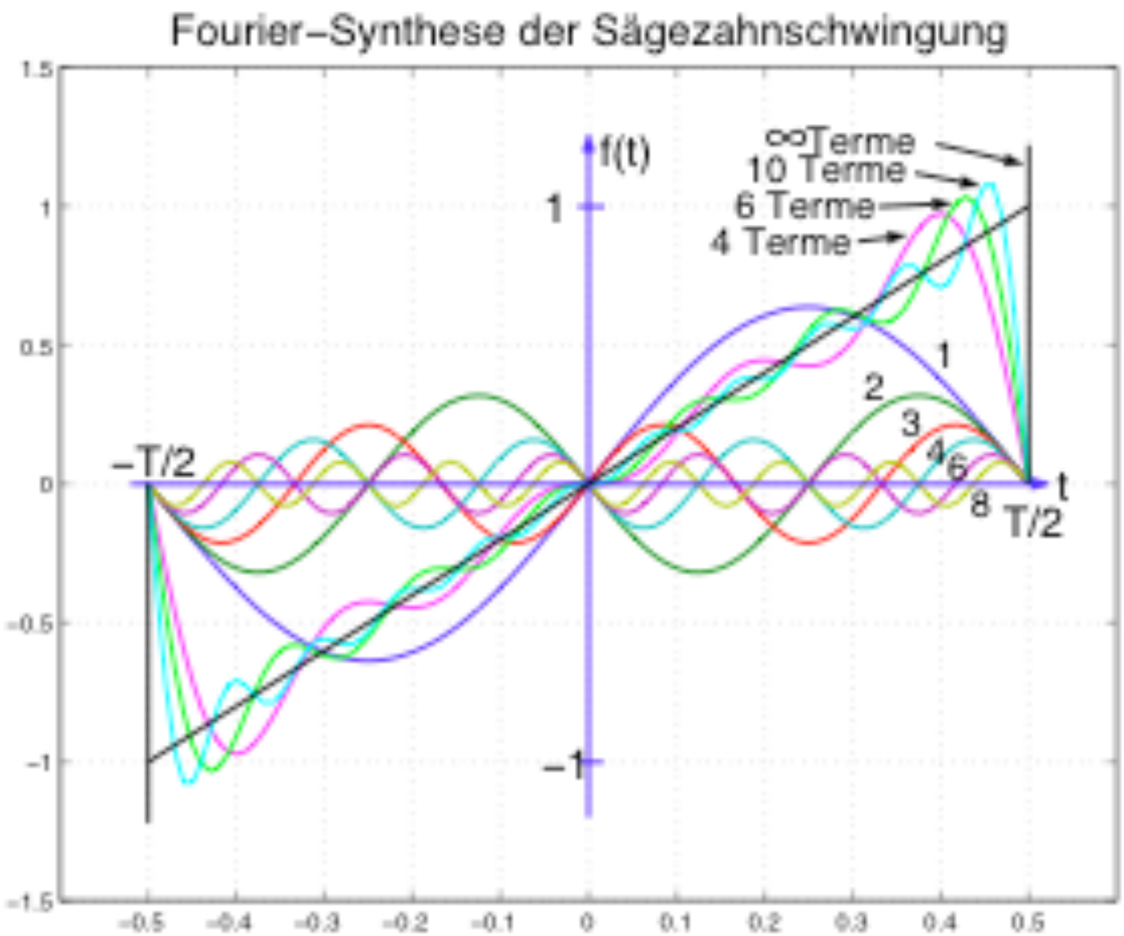




Beispiel: Sägezahnfunktion

- Sägezahnfunktion als Überlagerung von Sinusfunktionen



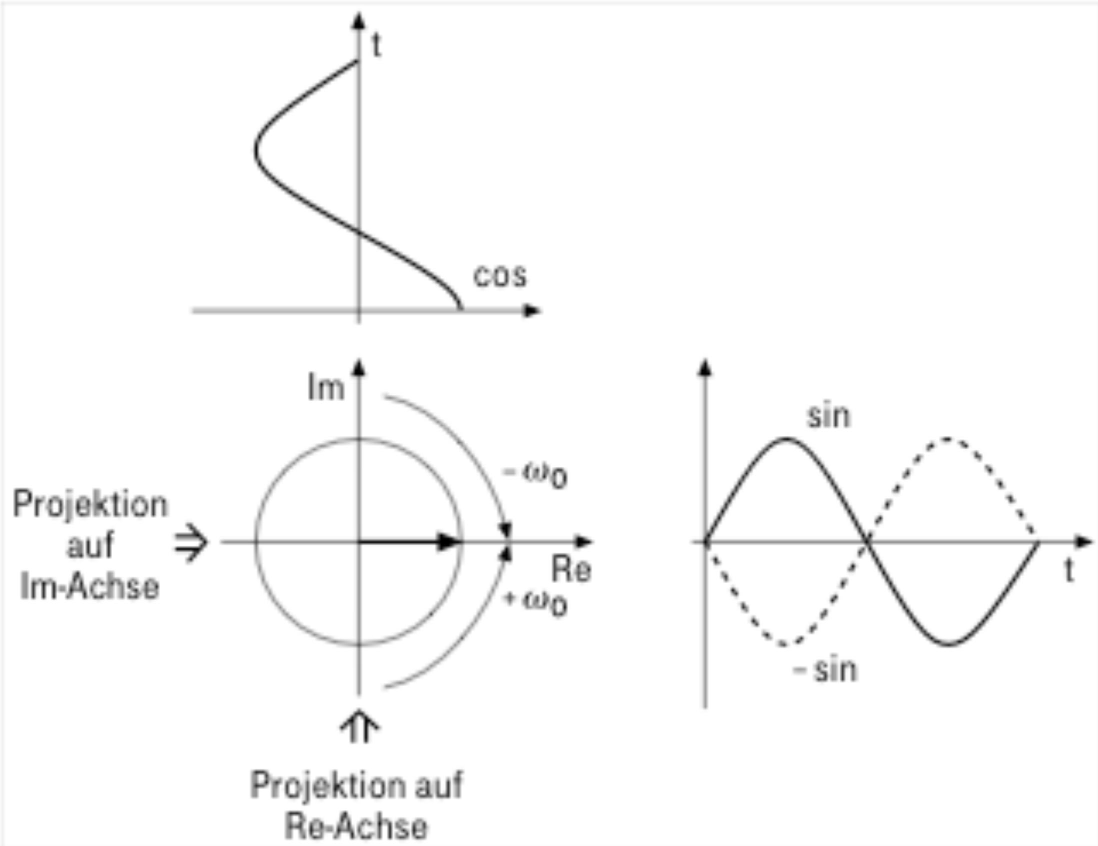


Quelle: D. Rudolph,
TFH Berlin

QUIZ

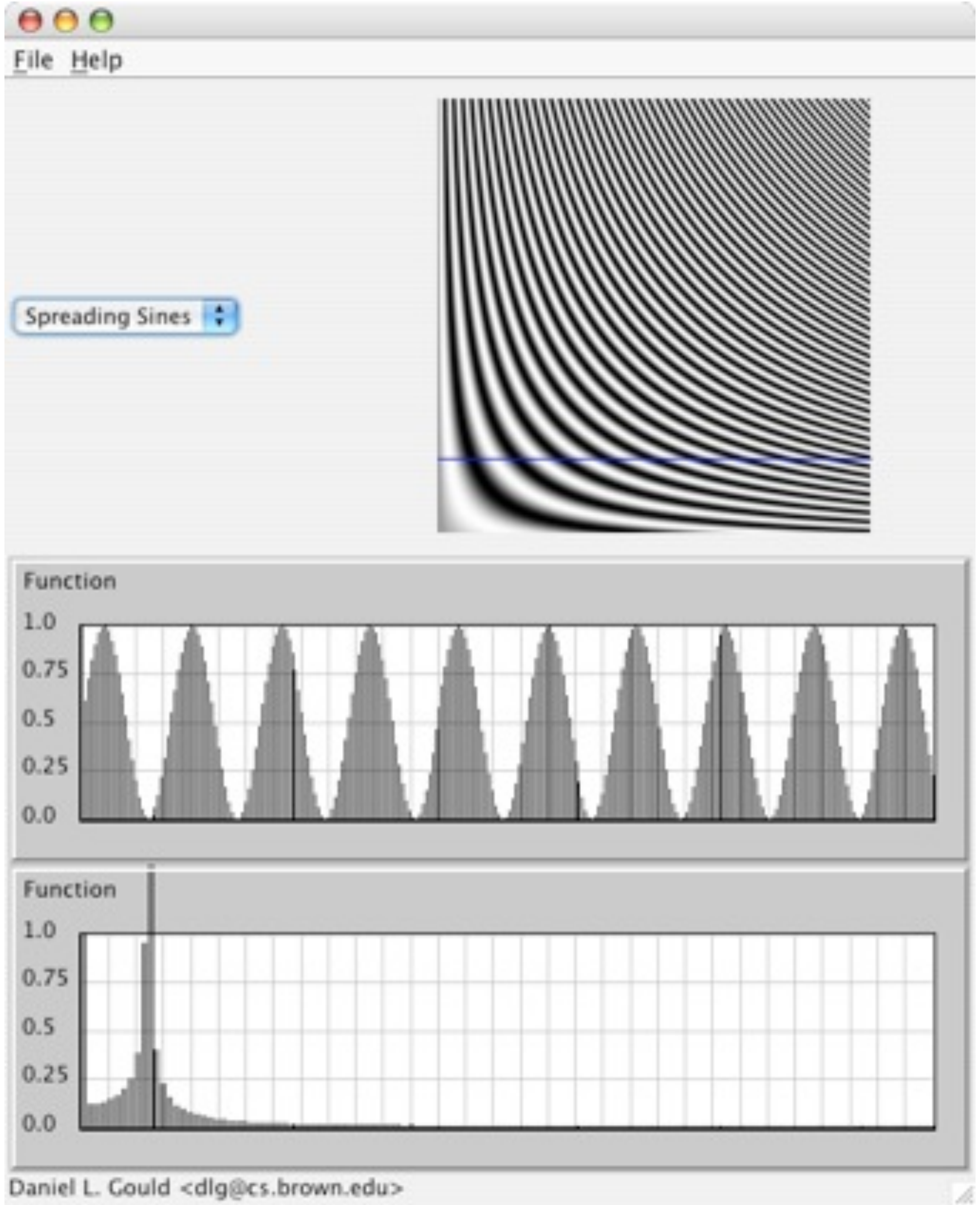
- Kann man ein ganzes Musikstück mit der Fourier-Transformation in den Frequenzraum überführen?
- Mit welchen Werkzeugen kann man praktisch eine Fourier-Transformation von Tonaufnahmen durchführen?

Negative Frequenzen?



- Positive Frequenz: Drehung des Phasors in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn)
- Negative Frequenz: Drehung des Phasors in mathematisch negativer Richtung (im Uhrzeigersinn)

Frequenzraum bei Bilddaten



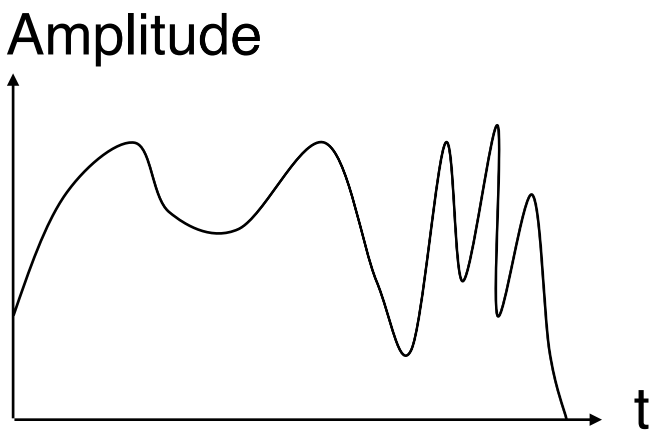
- Prinzipiell gelten die gleichen Zusammenhänge für (ortsabhängige) Bilddaten wie für (zeitabhängige) Audiodaten
- Beispiel links:
  – Wertverlauf eines Bildes entlang einer Linie
  – Frequenzspektrum
- Details siehe später...

http://www.cs.brown.edu/exploratories

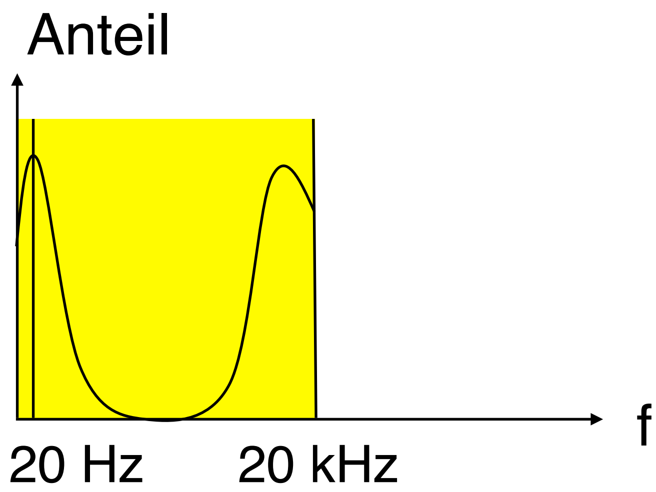
4 Signalverarbeitung

Bandbreitenbegrenzung

- Die meisten Signale haben eine obere und untere *Grenzfrequenz*, d.h. niedrigere oder höhere Frequenzen kommen nicht vor oder sind nicht relevant.
- Beispiel: Audio-Signale interessieren nur im menschlichen Hörbereich
  - ca. 20 Hz bis 20 kHz



Zeitabhängige Signaldarstellung



Frequenzabhängige Signaldarstellung

Abtastung mathematisch betrachtet

- Annahme: Abtastung einer Sinusschwingung mit f_0 Hz.
  - $x(t) = \sin(\omega t), \quad \omega = 2\pi f_0$
- Annahme: Abtastrate ist f_s, Abtastabstand ist $t_s = 1/ f_s$.
- Erste n Samples:
  - 0-tes Sample: $x(0) = \sin(2\pi f_0 \, 0 \; t_s)$
  - 1-tes Sample: $x(1) = \sin(2\pi f_0 \, 1 \; t_s)$
  - 2-tes Sample: $x(2) = \sin(2\pi f_0 \, 2 \; t_s)$
  - …
- $x(n) = \sin(2\pi f_0 \, n \, t_s) = \sin(2\pi f_0 \, n \, t_s + 2\pi \, m)$ (für beliebiges ganzes m)
  - Annahme: $m = k \, n$
  - $x(n) = \sin(2\pi(f_0 \, n \, t_s + m)) = \sin(2\pi(f_0 + m \,/\, (n \, t_s)) \; n \, t_s)$
    $= \sin(2\pi(f_0 + k \,/\, t_s) \; n \, t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k \, f_s) \; n \, t_s)$
  - Also: $x(n) = \sin(2\pi f_0 \, n \, t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k \, f_s) \; n \, t_s)$
- ***Man kann nicht zwischen den Abtastwerten eines Sinussignals von f_0 Hz und f_0+$k \cdot f_s$ Hz unterscheiden!***

Beweis für die Aussage (Einfach)

- n-tes Sample: $x(\mathrm{n}) = \sin(2\pi f_0\, n\, t_s)$
- x(n)

  $= \sin(2\pi f_0\, n\, t_s)$

  $= \sin(2\pi f_0\, n\, t_s + 2\pi\, m)$ (Sinus-Eigenschaft, für beliebiges ganzes m)

  $= \sin(2\pi(f_0\, n\, t_s + m))$

  $= \sin(2\pi(f_0\, n\, t_s + (m\, n\, t_s)/(n\, t_s)))$ (Erweitern mit $n\, t_s$)

  $= \sin(2\pi(f_0 + m\, /\, (n\, t_s))\ n\, t_s)$ (Ausklammern)

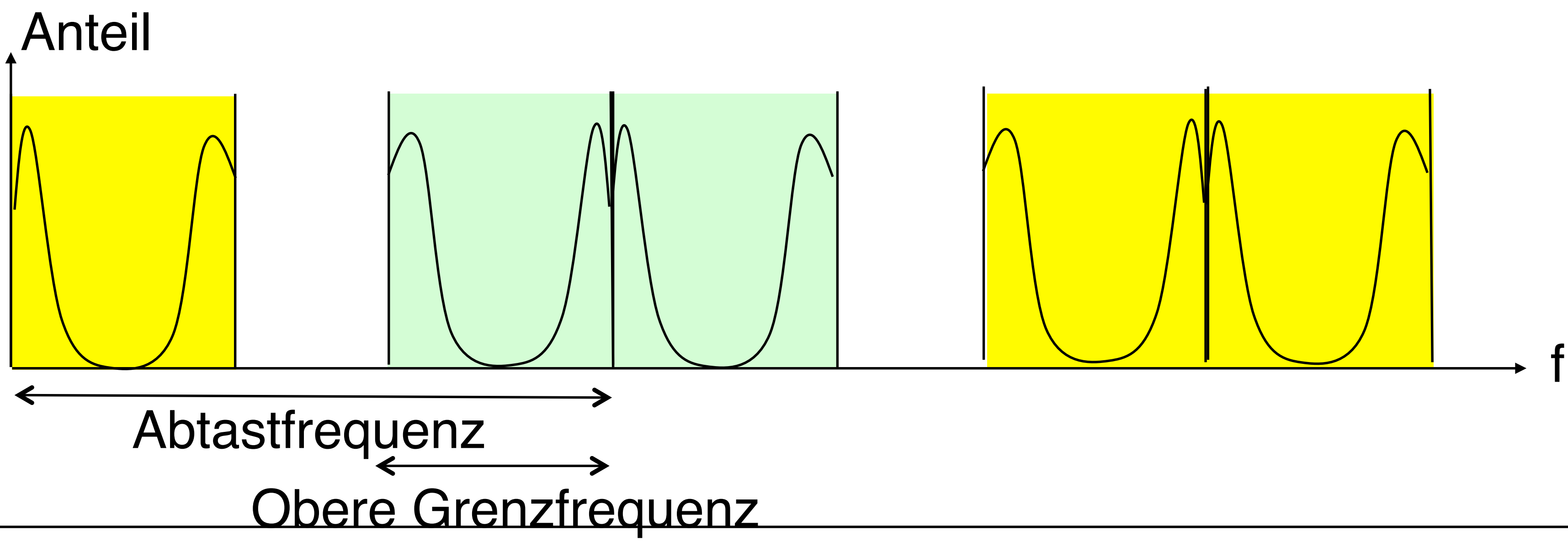
  $= \sin(2\pi(f_0 + k\, /t_s\ )n\, t_s)$ (Annahme $m = k\, n$)

  $= \sin(2\pi(f_0 + k\, f_s\ )n\, t_s)$ ($1/t_s = f_s$)

  = n-tes Sample für $f_0 + k\, f_s$

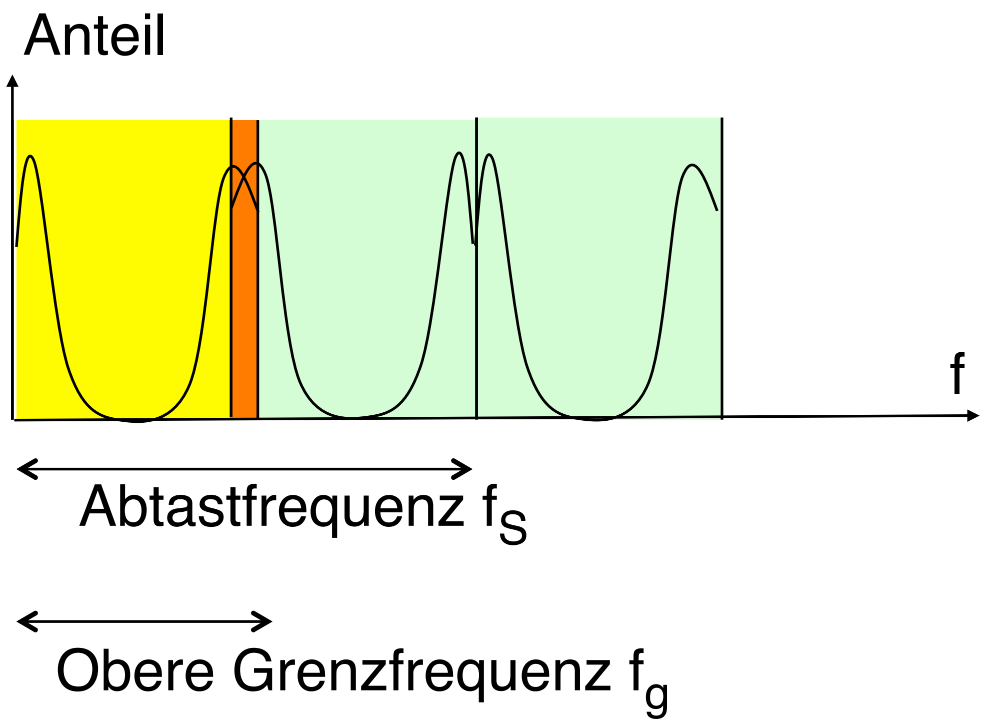
Abtastung im Frequenzraum

- Effekt der Abtastung im Frequenzraum:
  - Originalspektrum ***wiederholt sich im Abstand der Abtastfrequenz***
  - Originalspektrum ist symmetrisch um den Ursprung, wird auch in den Wiederholungen gespiegelt.
- Andere (meist zitierte) mathematische Erklärung:
  - "Kamm-Funktion" zur Modellierung der Abtastung
  - "Faltung" zwischen Original und Kamm führt zur Replikation des Originalspektrums



Aliasing

- Wenn sich die wiederholten Frequenzspektren überlappen, kommt es zur Bildung nicht vorhandener (Alias-) Frequenzen im rekonstruierten Signal.



Aliasing wird vermieden, wenn $2 * f_g < f_S$