

# 4 Signalverarbeitung

- 4.1 Grundbegriffe 
- 4.2 Frequenzspektren, Fourier-Transformation
- 4.3 Abtasttheorem: Eine zweite Sicht
- 4.4 Filter

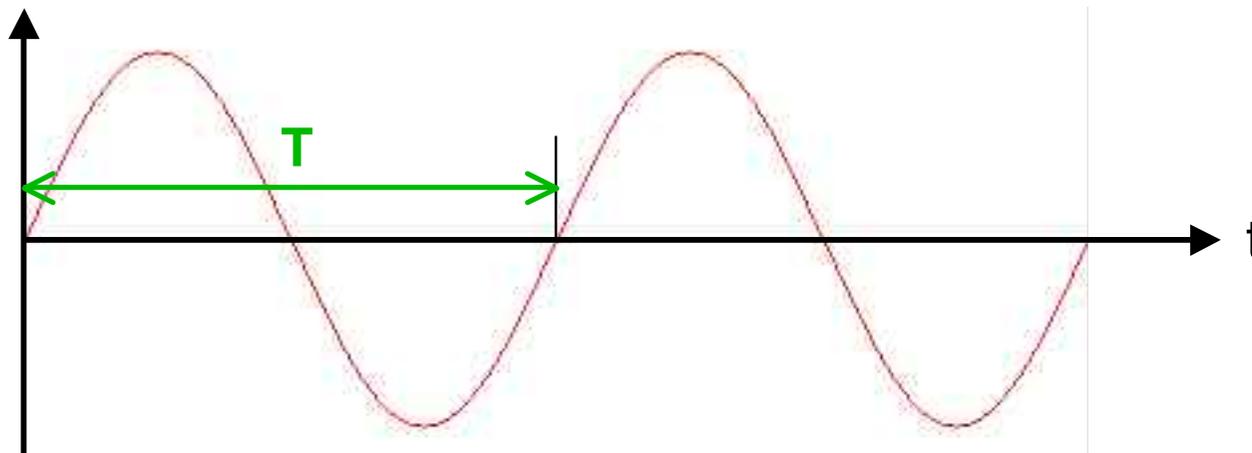
Weiterführende Literatur (z.B.):

Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Richard C. Lyons: Understanding Digital Signal Processing, 2nd ed., Prentice-Hall 2004

# Frequenz und Periode

- Viele zeitveränderliche Signale sind *periodisch* oder enthalten periodische Anteile
- Periodisch: Signalverlauf wiederholt sich regelmäßig
- *Periodenlänge T*: Dauer (in s bei zeitabhängigen Signalen) bis zum Beginn der nächsten Wiederholung
- *Frequenz f*: Anzahl der Wiederholungen pro Sekunde (Hz)

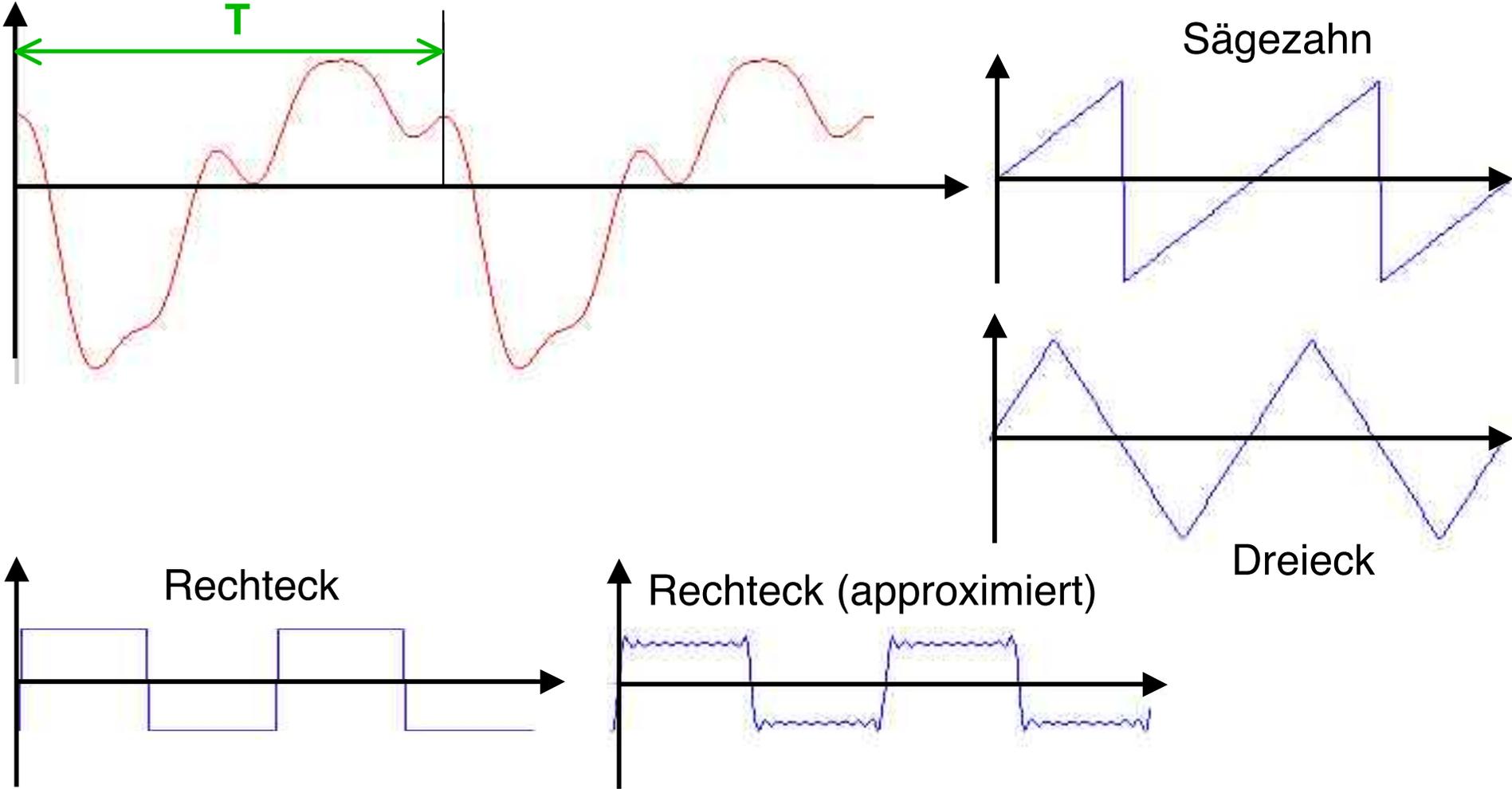


Sinus-Signal

$$T = \frac{1}{f}$$

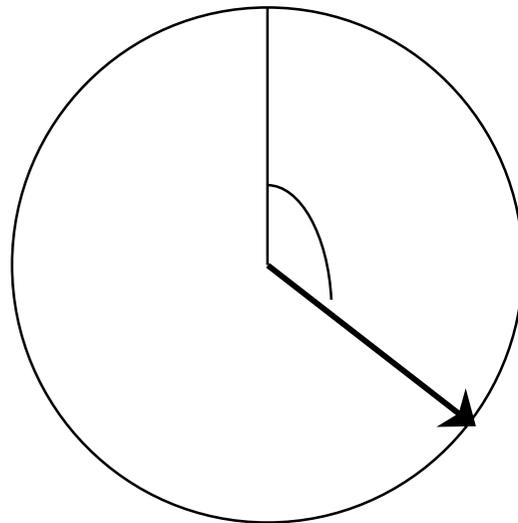
$$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$$

# Beispiele periodischer Signale



# Gradmaß und Bogenmaß

- Die Größe eines Winkels kann in Grad oder als Teil des Umfangs eines Einheitskreises ( $2\pi$ ) angegeben werden.



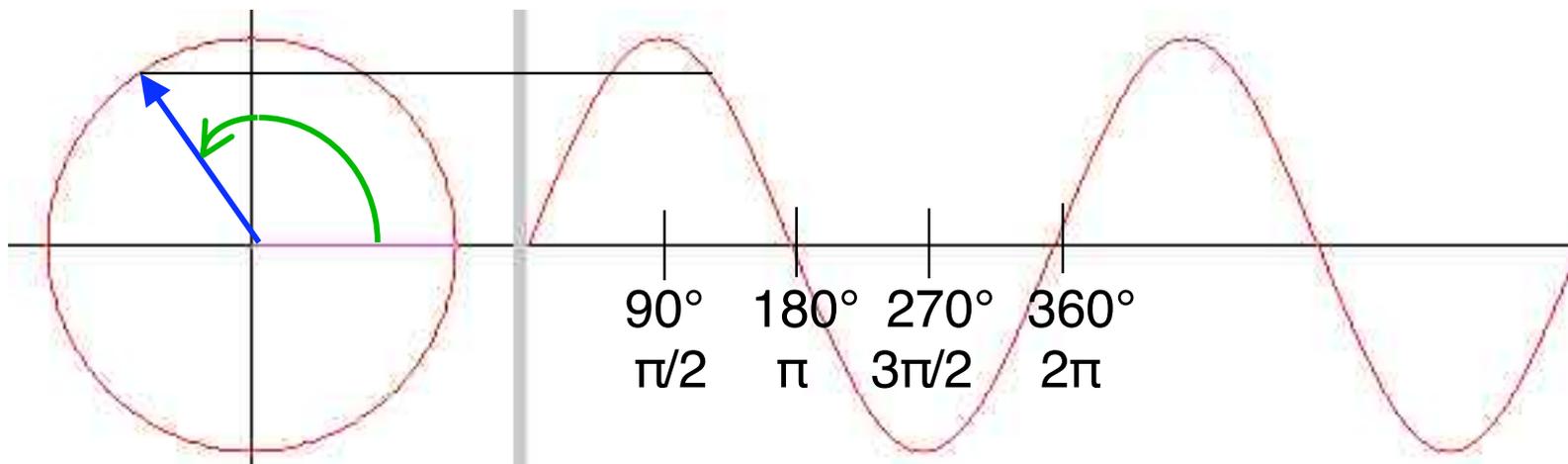
Gradmaß	Bogenmaß
$90^\circ$	$\pi/2$
$180^\circ$	$\pi$
$270^\circ$	$3/2 \cdot \pi$
$360^\circ$	$2 \cdot \pi$

# Kreisfrequenz

- Die Kreisfrequenz  $\omega$  gibt den pro Sekunde von einem drehenden Zeiger überstrichenen Winkel im Bogenmaß an (rad/s).

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Beispiel: Zeigerdarstellung (Phasor) einer Sinusschwingung:



# Schwingungen und komplexe Zahlen

Eulersche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Gleichwertige Darstellungen einer (Co-)Sinus-Schwingung:

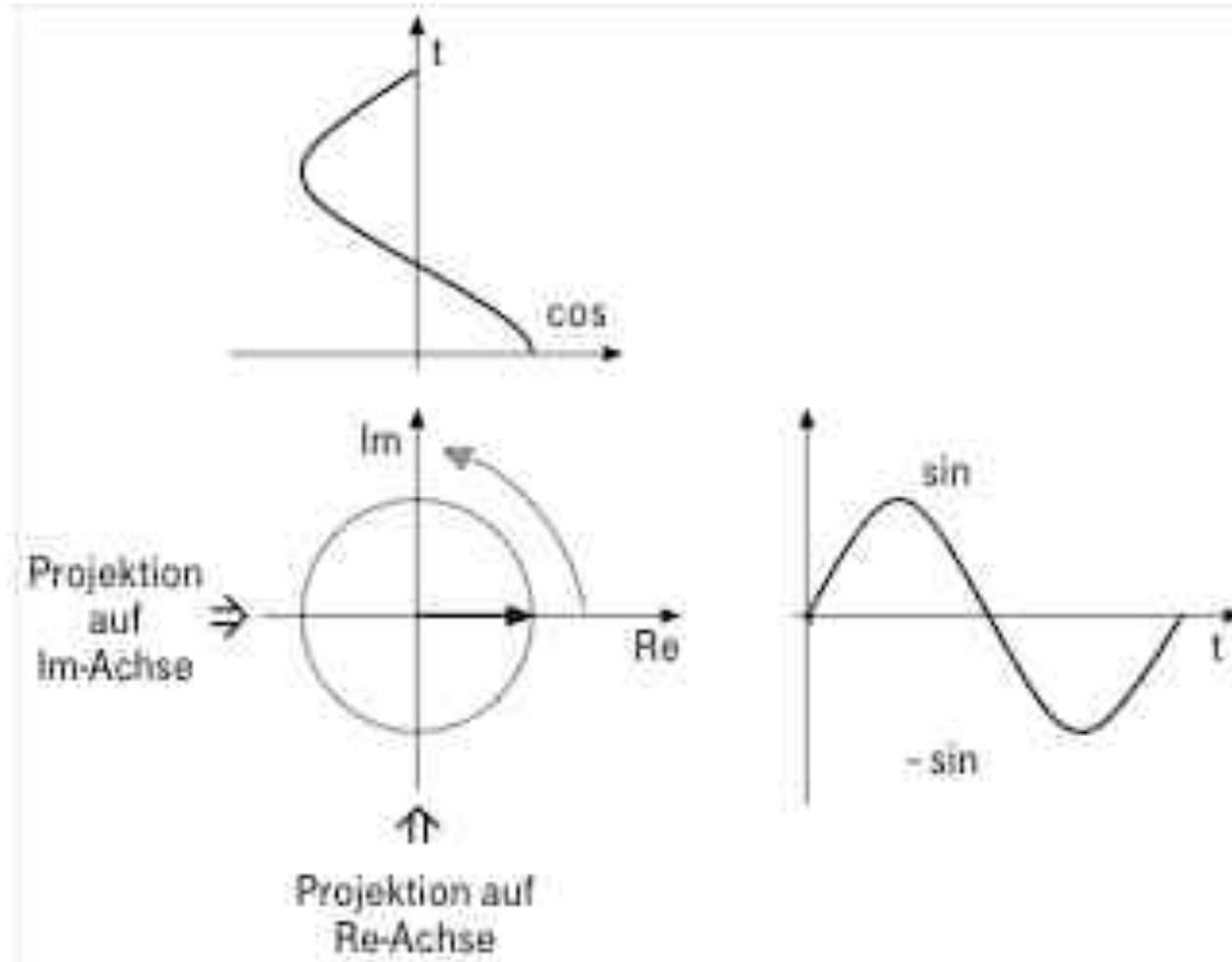
$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(a \cdot e^{i\omega t + \theta})$$

$a$  Amplitude

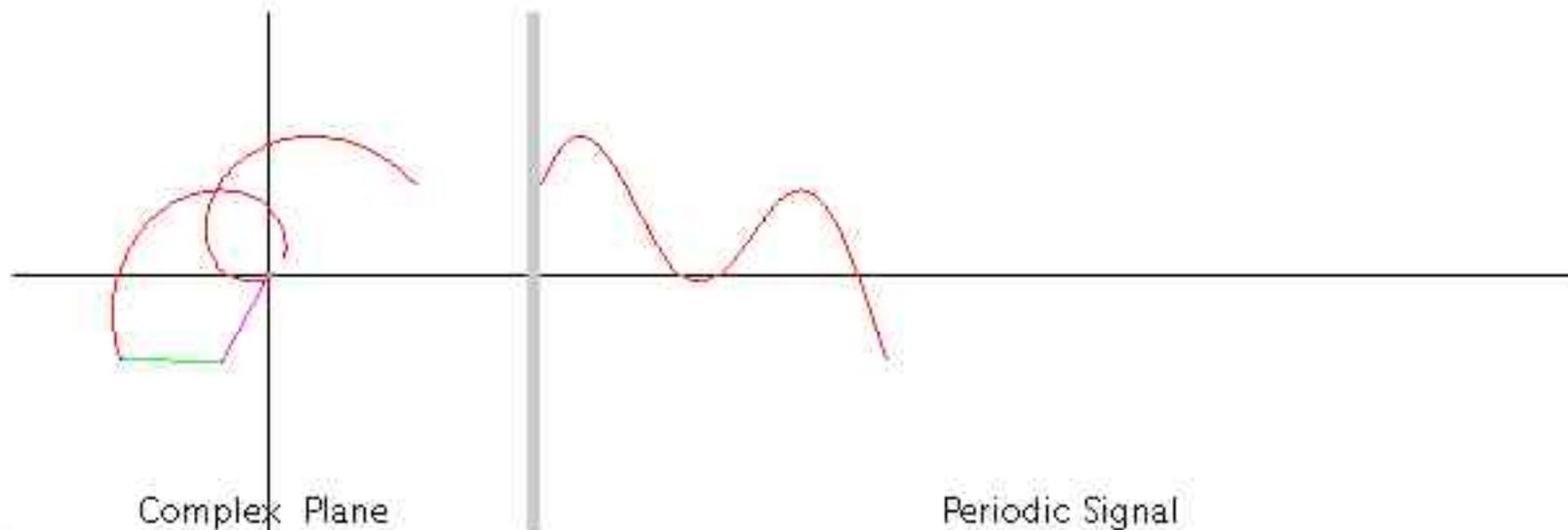
$\omega$  Frequenz

$\theta$  Phasenverschiebung



# Summieren von Schwingungen

- Die Summation zweier periodischer Schwingungen ergibt wieder eine periodische Schwingung.
- Beispiel:
  - Überlagerung von Sinus/Cosinusfunktionen
  - "Phasor"-Darstellung (d.h. drehende Zeiger)
  - Summation =  
Anfang/Drehpunkt zweiter Drehzeiger am Ende des ersten Zeigers

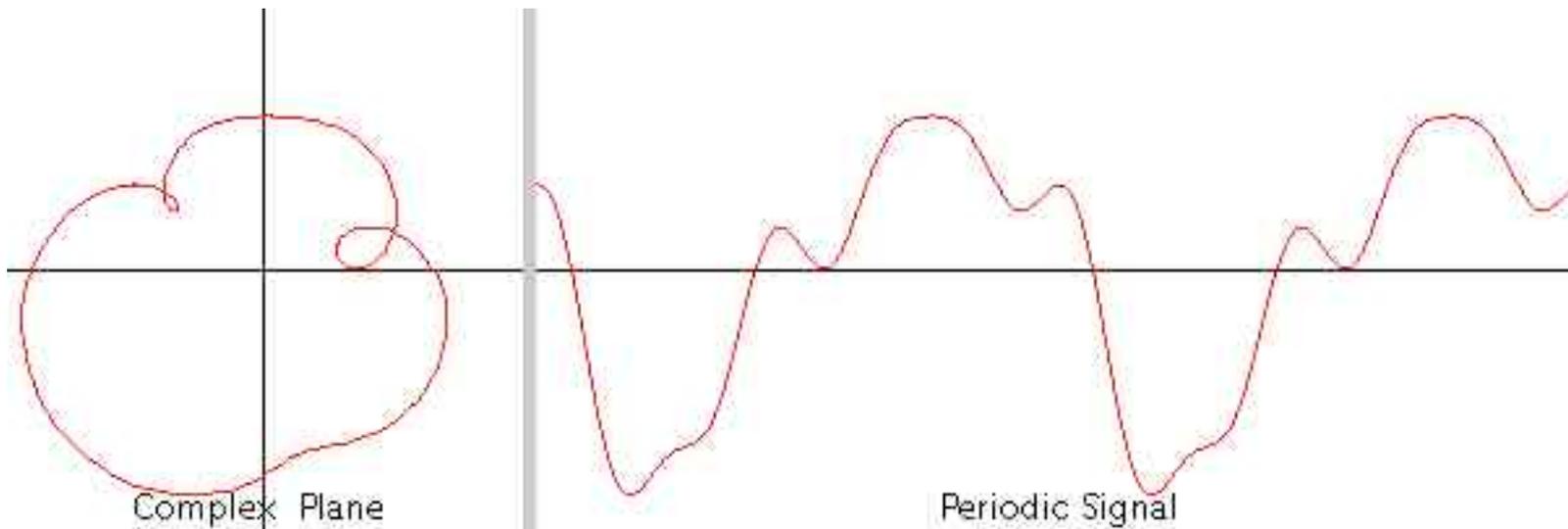


Siehe: <http://www.jhu.edu/~signals/phasorlecture2/indexphasorlect2.htm>

# Summe harmonischer Schwingungen

- Eine Menge von Schwingungen heißt *harmonisch*, wenn die Frequenzen der beteiligten Schwingungen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind.
  - Beispiel:  $x_1(t) = 4 \cos(3t)$ ,  $x_2(t) = 2 \cos(6t + \pi/4)$

Überlagerung von fünf harmonischen Schwingungen:



# 4 Signalverarbeitung

4.1 Grundbegriffe

4.2 Frequenzspektren, Fourier-Transformation



4.3 Abtasttheorem: Eine zweite Sicht

4.4 Filter



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

# Fourier-Reihen

- *Jede* periodische Schwingung kann durch eine Summe harmonischer Cosinus-Schwingungen angenähert werden.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$a_0 \cdot \cos(\theta_0)$$

Gleichanteil

$$a_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_1)$$

Grundfrequenz

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad k \geq 2 \quad k\text{-te harmonische Schwingung}$$

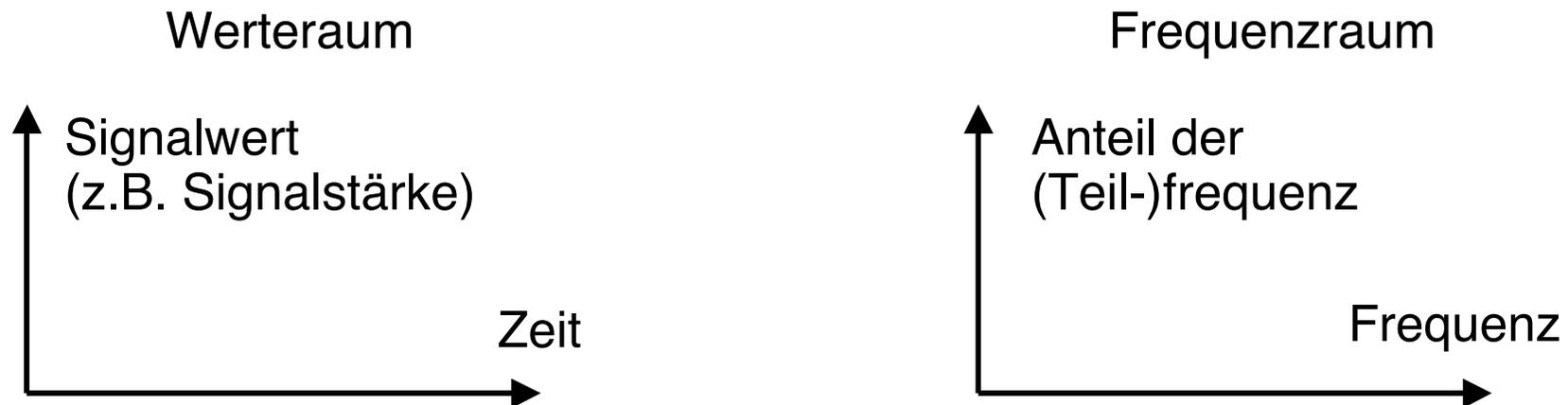
- *Jede* periodische Schwingung kann durch eine (endliche) Summe von Cosinus-Schwingungen angenähert werden.
  - Die "richtigen" Koeffizienten  $a_k$  lassen sich mathematisch bestimmen.
  - Die Genauigkeit der Approximation hängt davon ab, wann die Summe abgebrochen wird.

# Fourier-Transformation

- Fourierreihen-Approximation funktioniert für periodische Funktionen
  - mit bestimmten (in der Praxis meist erfüllten) Eigenschaften
- Übertragung auf nicht-periodische Funktionen
  - Auswahl eines Teilabschnitts (in der Zeit)
  - Periodische "Fortsetzung" des Teilabschnitts
- Fourier-Transformation
  - Übersetzt eine Funktion in den "Frequenzraum" (Spektrum)
  - Algorithmisch relativ einfach, z.B. als "Fast Fourier Transformation" (FFT) in Hard- oder Software realisiert
  - Transformation umkehrbar

# Frequenzspektrum

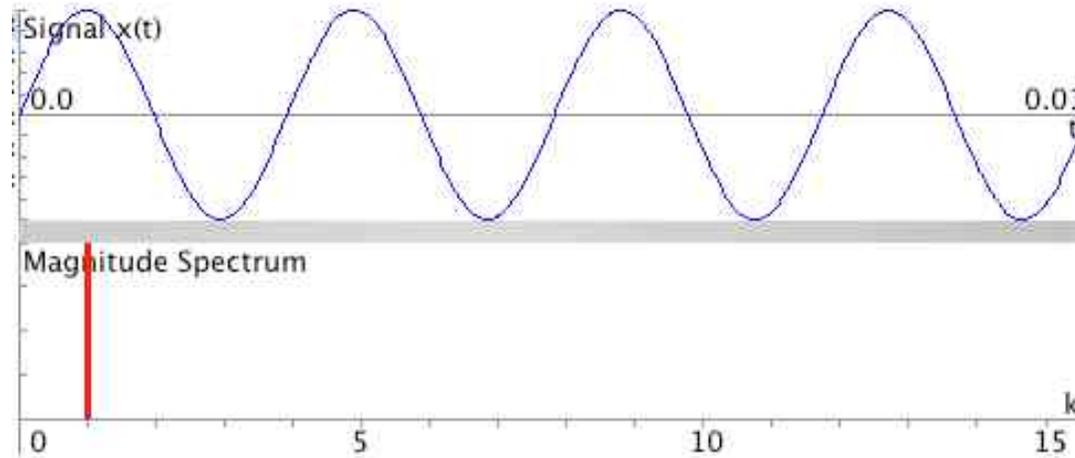
- Jedes Signal setzt sich aus einer Überlagerung verschiedener (Co)sinusschwingungen zusammen.
- Statt über das Signal zu reden, können wir auch über die Frequenzzusammensetzung des Signals reden (das *Frequenzspektrum*).
- Eine Funktion im *Frequenzraum* gibt an, welchen Anteil eine bestimmte Frequenz am Signal hat.



Hinweis: Ebenso einsetzbar bei ortsabhängigen statt zeitabhängigen Signalen!

# Beispiel: Frequenzspektrums eines Klangs

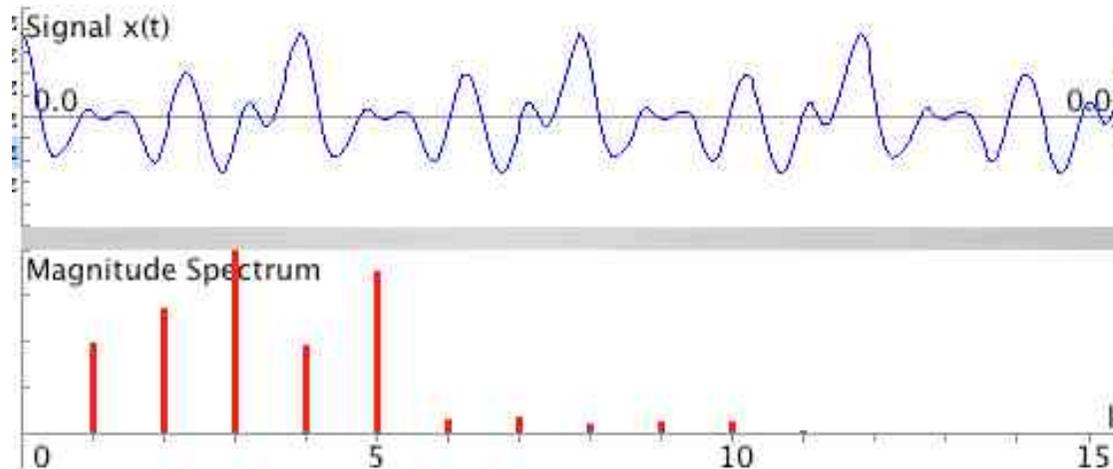
Sinusschwingung (349 Hz):



Werteraum

Frequenzraum

Oboenton (349 Hz):

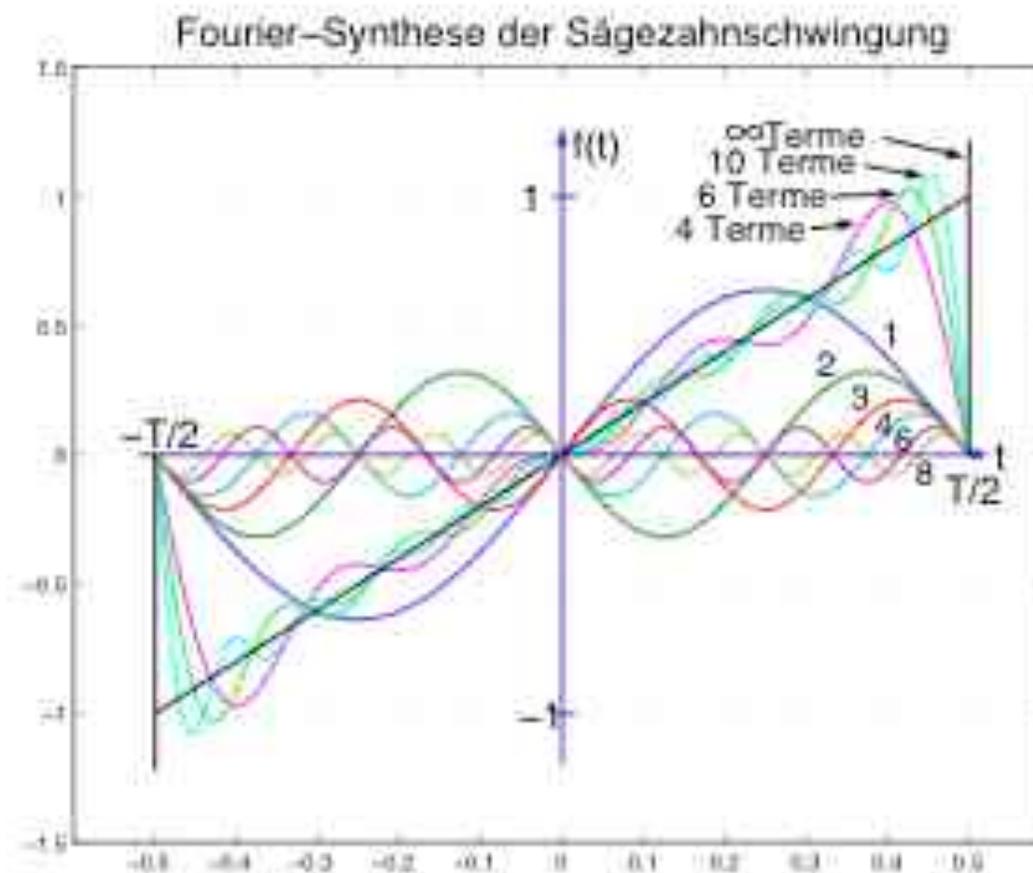
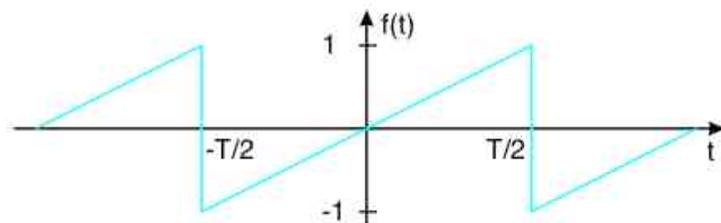


Werteraum

Frequenzraum

# Beispiel: Sägezahnfunktion (1)

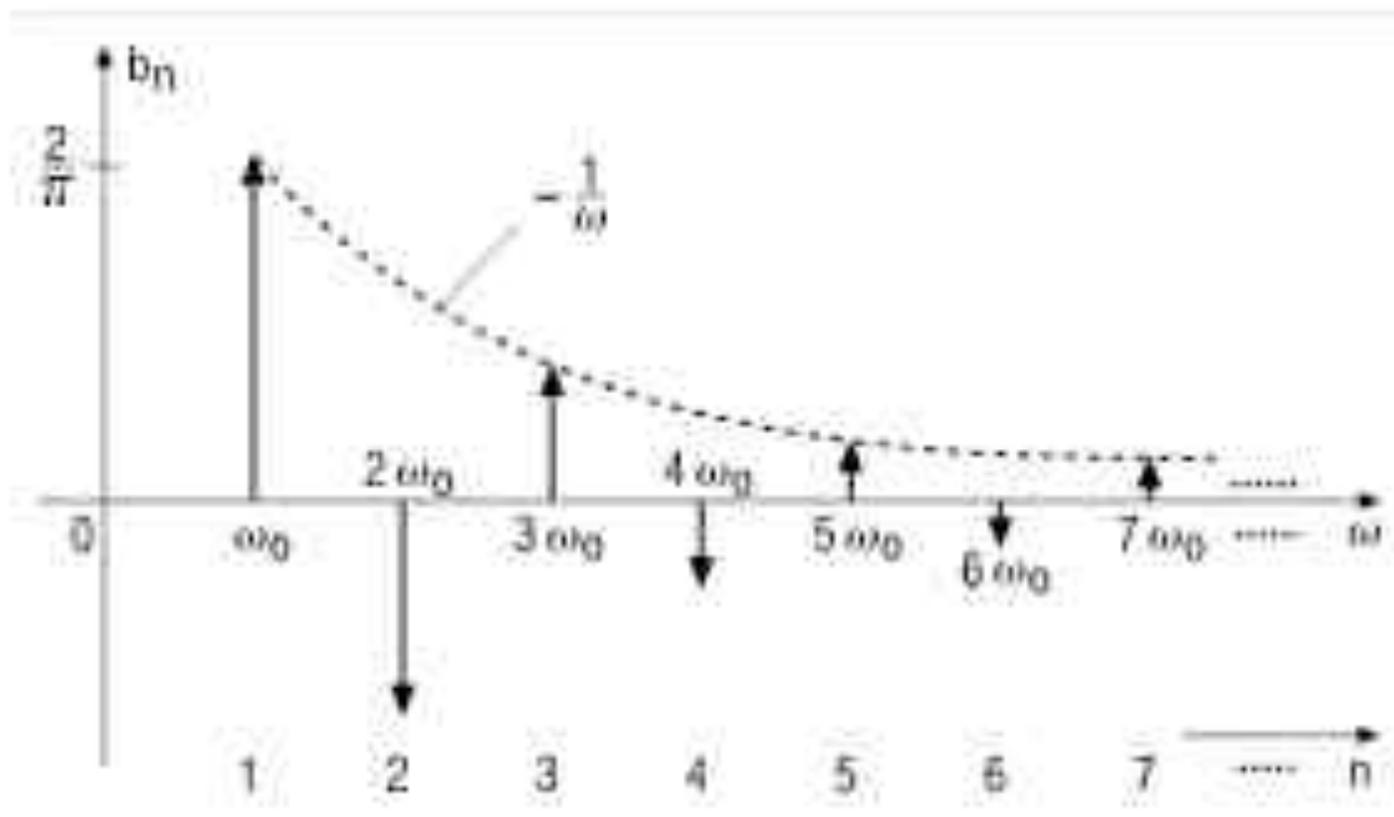
- Sägezahnfunktion als Überlagerung von Sinusfunktionen



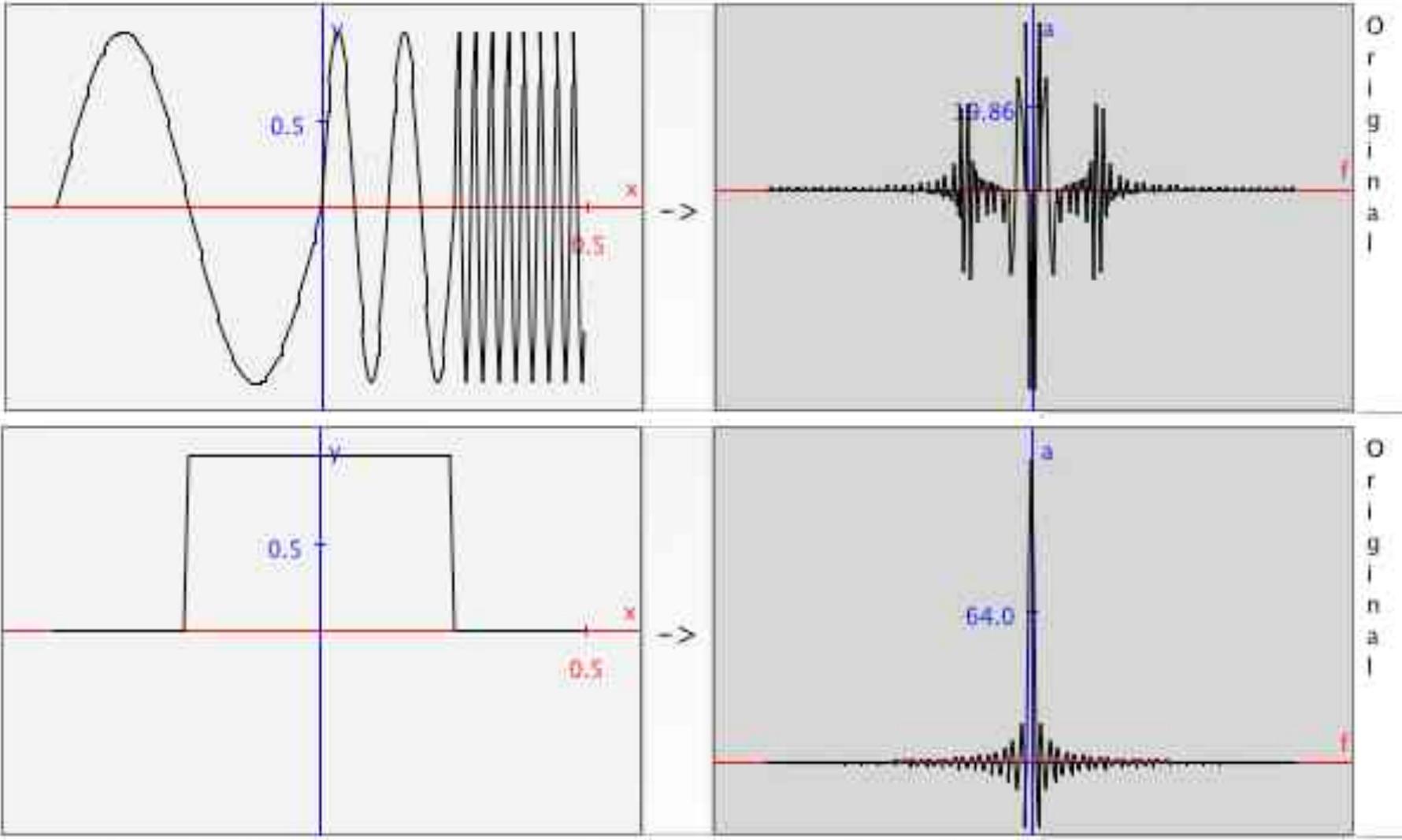
Quelle: D. Rudolph,  
TFH Berlin

# Beispiel: Sägezahnfunktion (2)

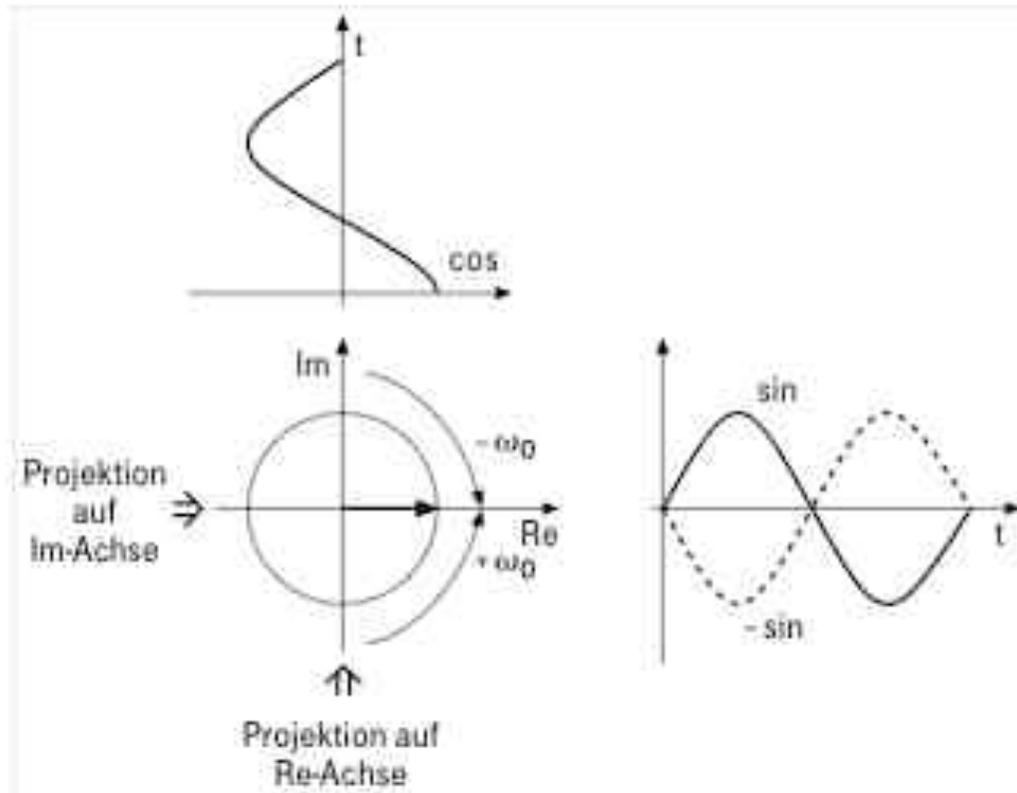
- Darstellung der Sägezahnfunktion im Frequenzraum



# Frquenzspektrum: Beispiele

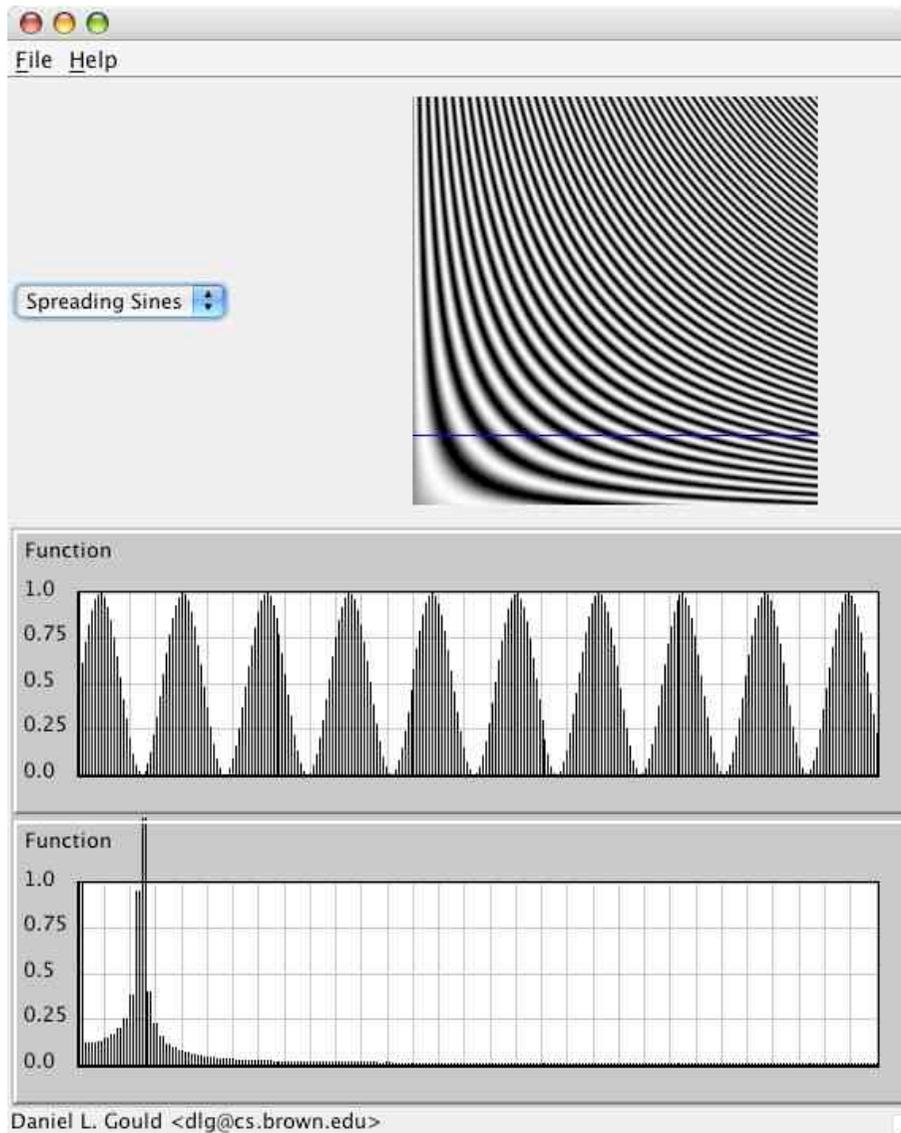


# Negative Frequenzen?



- Positive Frequenz: Drehung des Phasors in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn)
- Negative Frequenz: Drehung des Phasors in mathematisch negativer Richtung (im Uhrzeigersinn)

# Frequenzraum bei Bilddaten



- Prinzipiell gelten die gleichen Zusammenhänge für (ortsabhängige) Bilddaten wie für (zeitabhängige) Audiodaten
- Beispiel links:
  - Wertverlauf eines Bildes entlang einer Linie
  - Frequenzspektrum
- Details siehe später...

# 4 Signalverarbeitung

4.1 Grundbegriffe

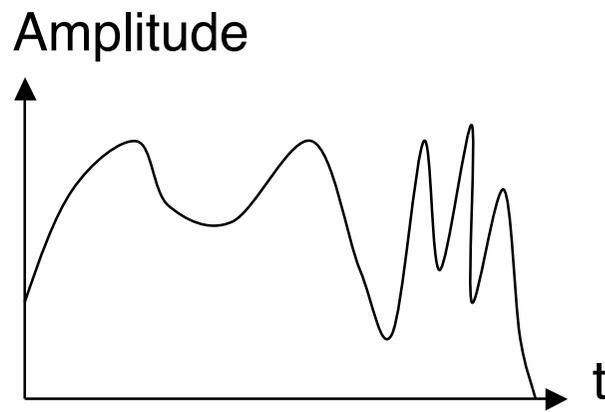
4.2 Frequenzspektren, Fourier-Transformation

4.3 Abtasttheorem: Eine zweite Sicht 

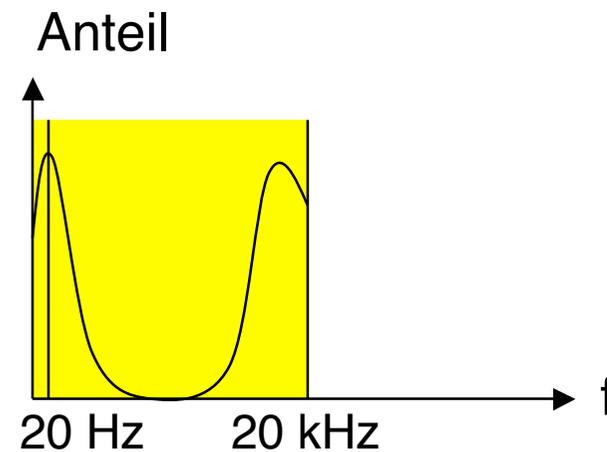
4.4 Filter

# Bandbreitenbegrenzung

- Die meisten Signale haben eine obere und untere *Grenzfrequenz*, d.h. niedrigere oder höhere Frequenzen kommen nicht vor oder sind nicht relevant.
- Beispiel: Audio-Signale interessieren nur im menschlichen Hörbereich
  - ca. 20 Hz bis 20 kHz



Zeitabhängige  
Signaldarstellung



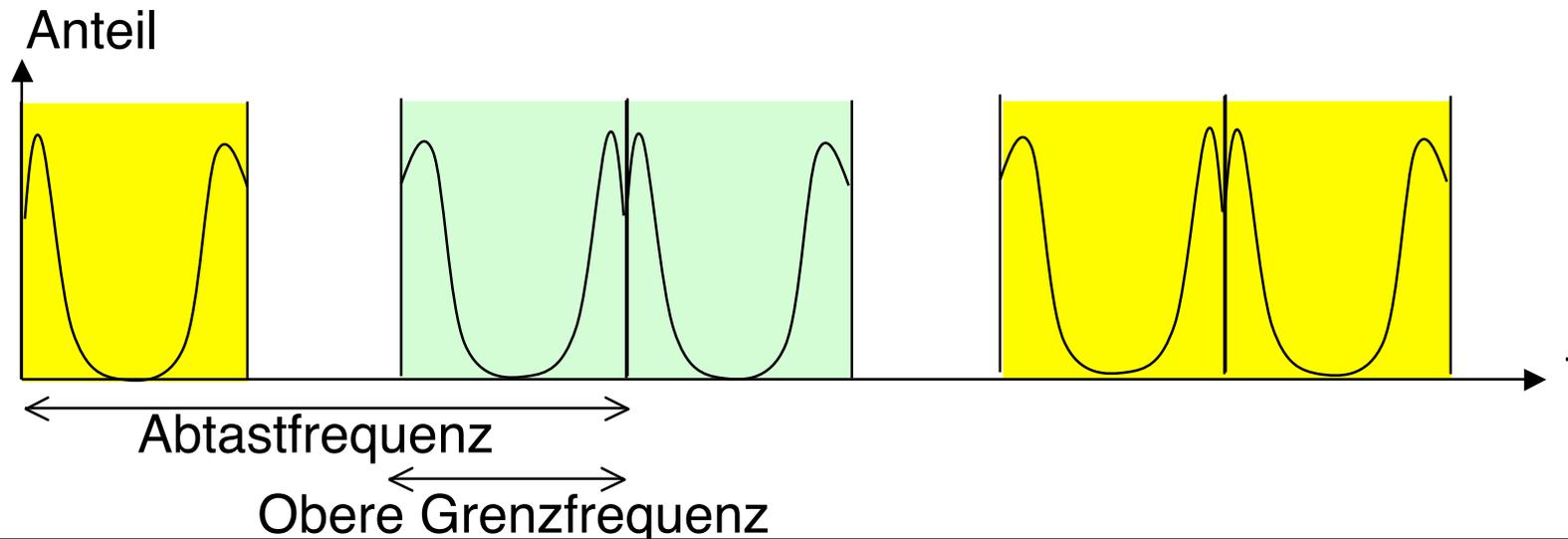
Frequenzabhängige  
Signaldarstellung

# Abtastung mathematisch betrachtet

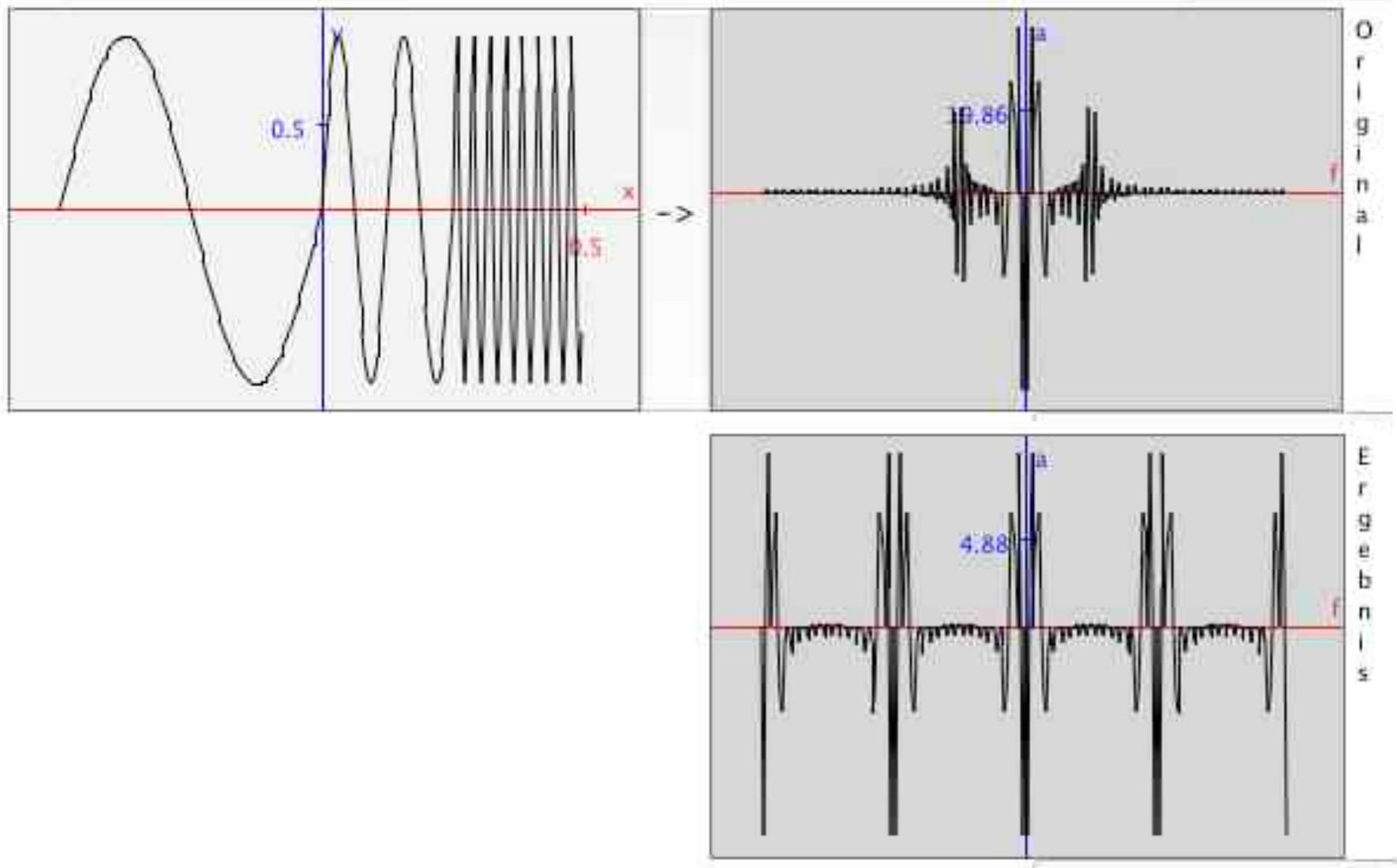
- Annahme: Abtastung einer Sinusschwingung mit  $f_0$  Hz.
  - $x(t) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi f_0$
- Annahme: Abtastrate ist  $f_s$ .
- Erste  $n$  Samples:
  - 0-tes Sample:  $x(0) = \sin(2\pi f_0 0 t_s)$
  - 1-tes Sample:  $x(1) = \sin(2\pi f_0 1 t_s)$
  - 2-tes Sample:  $x(2) = \sin(2\pi f_0 2 t_s)$
  - ...
- $x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m)$  (für beliebiges ganzes  $m$ )
  - Annahme:  $m = k n$
  - $x(n) = \sin(2\pi(f_0 n t_s + m)) = \sin(2\pi(f_0 + m / (n t_s)) n t_s)$   
 $= \sin(2\pi(f_0 + k / t_s) n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s) n t_s)$
  - Also:  $x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s) n t_s)$
- **Man kann nicht zwischen den Abtastwerten eines Sinussignals von  $f_0$  Hz und  $f_0+k \cdot f_s$  Hz unterscheiden!**

# Abtastung im Frequenzraum

- Effekt der Abtastung im Frequenzraum:
  - Originalspektrum **wiederholt sich im Abstand der Abtastfrequenz**
  - Originalspektrum ist symmetrisch um den Ursprung, wird auch in den Wiederholungen gespiegelt.
- Andere (meist zitierte) mathematische Erklärung:
  - "Kamm-Funktion" zur Modellierung der Abtastung
  - "Faltung" zwischen Original und Kamm führt zur Replikation des Originalspektrums

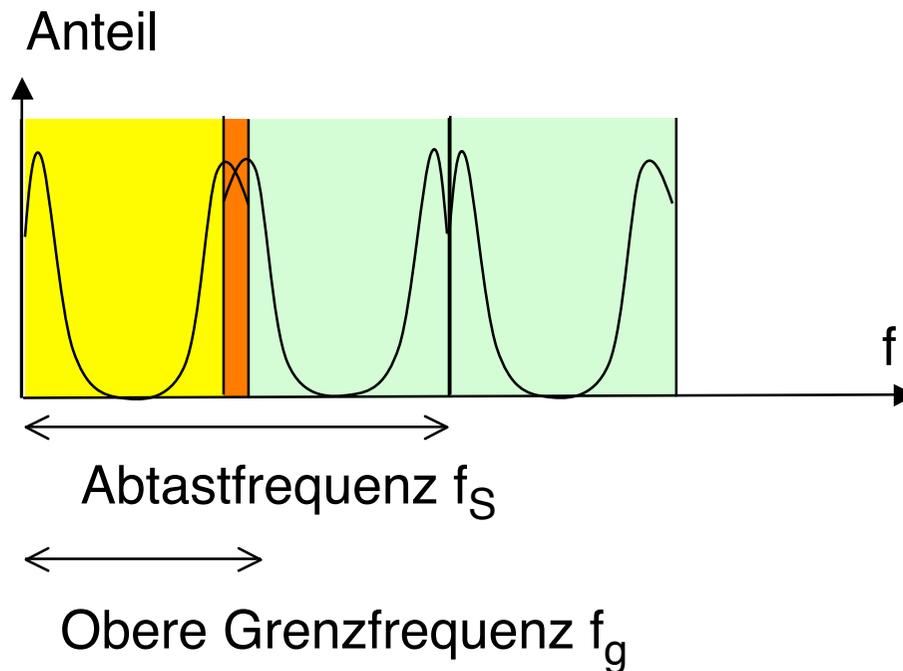


# Abtastung: Beispiel



# Aliasing

- Wenn sich die wiederholten Frequenzspektren überlappen, kommt es zur Bildung nicht vorhandener (Alias-) Frequenzen im rekonstruierten Signal.



Aliasing wird vermieden,  
wenn  $2 \cdot f_g < f_s$

# 4 Signalverarbeitung

4.1 Grundbegriffe

4.2 Frequenzspektren, Fourier-Transformation

4.3 Abtasttheorem: Eine zweite Sicht

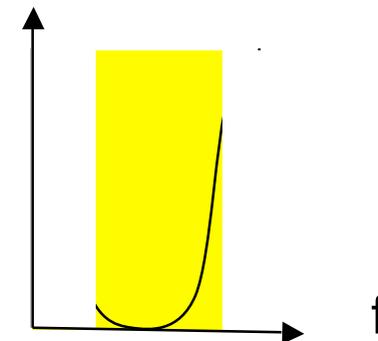
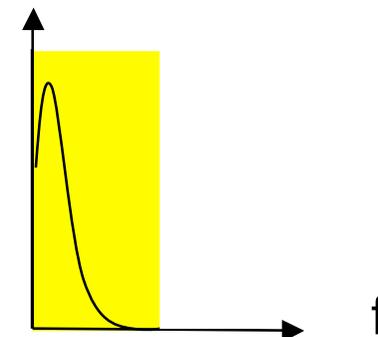
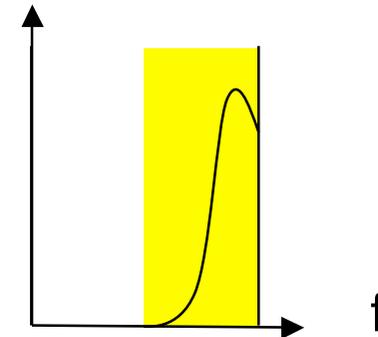
4.4 Filter 

# Frequenzfilter

- Filter sind Operationen oder Baugruppen, die selektiv bestimmte Frequenzbereiche des Signals beeinflussen.
  - Ideale Filter: Blenden bestimmte Frequenzen vollständig aus, lassen andere Frequenzen vollständig unverändert
  - Praktische Filter: Übergangseffekte an den Rändern
- Filter werden an verschiedenen Stellen der Signalverarbeitung verwendet
- Beispiele:
  - Tonhöhenregelung beim Klang (“Equalizer”)
  - Frequenzweichen in Lautsprechersystemen
  - Farbabstimmung bei Bildern (“Farbfilter”)
  - Vorfilterung von Signalen vor Digitalisierung (um Abtasttheorem einzuhalten)
  - Rekonstruktionsfilter in Digital-Analog-Wandlern
    - » Nur Frequenzen des Original-Frequenzbandes relevant

# Filter-Terminologie

- Hochpass:
  - Lässt hohe Frequenzen passieren, blendet tiefe Frequenzen aus
- Tiefpass:
  - Lässt tiefe Frequenzen passieren, blendet hohe Frequenzen aus
- Bandpass:
  - Lässt Frequenzen in einem bestimmten Intervall passieren, blendet höhere oder niedrigere Frequenzen aus
- Filter sind genauer durch *Grenzfrequenzen* beschrieben



# Rekonstruktions-Filter

- Wie funktioniert die Rekonstruktion eines analogen Signals aus einem digitalen Signal?
  - Digitales Signal verstanden als Impulsfolge (*impulse train*), also als zeitabhängiges Signal
  - Signalspektrum enthält viele hohe Frequenzen
  - Es genügt, das Frequenzspektrum auf die im Original zulässigen Frequenzen zu begrenzen (Tiefpass mit oberer Grenzfrequenz des Originalsignals)
- "Idealer Tiefpass"
  - Mathematische Konstruktion ("sinc"-Funktion,  $\sin(x)/x$ )
  - In idealer Form nicht praktisch realisierbar
  - Liefert mathematisch gesehen das analoge Originalsignal